

# 球对称恒星的引力平衡与平衡态附近的振荡<sup>1)</sup>

徐仁新 乔国俊

(北京大学物理学院,北京,100871)

**摘要** 根据球对称恒星引力与压力间的平衡,用半定量方法得到了恒星振动周期与其平均密度的关系。简要地说明了周光关系方法测量恒星距离的原理。

**关键词** 恒星;引力平衡;造父变星

**中图分类号** P 124; P 144

恒星是星系、宇宙的基本单元;有关恒星结构与演化的研究成果是天体物理学领域最成熟的理论之一。宇宙早期核合成过程的主要产物是氢和氦;一般将这两种元素称为轻元素,其他元素称为重元素。主序恒星中心是主要的重元素核合成场所。研究还发现,许多重要的天体物理现象也是与恒星分不开的。主序星的核过程释放大能量,它们主要是以热压与引力相互平衡的体系(其中的辐射压可以被忽略)。恒星有许多重要特征跟这种平衡密切相关。本文将定量地讨论球对称恒星的引力平衡并半定量地讨论其平衡态附近的振荡。

对于半径  $R$ 、质量  $M$  的球对称恒星,如图所示,位于径矢  $r$  处的密度为  $\rho$ ,压强为  $P$ 。定义

$$m(r) = \int_0^r 4\pi(x)^2 \rho(x) dx。$$

考虑恒星中  $r$  到  $r + dr$  的一层物质的受力平衡。向内的引力:  $Gm(r) \cdot 4\pi r^2 dr / r^2$ ; 向外压力:  $4\pi r^2 [P - (P + dP)] = -4\pi r^2 dP$ 。故有

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} - \rho(r) \tag{1}$$

称为在 Newton 引力作用下球对称恒星的流体静力学平衡方程。

式(1)是恒星处于流体静力学平衡下的定量描述。下面用半定量的方法来讨论恒星物质处于非流体静力学平衡下的行为。这里假定恒星在平衡态附近的振荡是绝热的。因为是处于等离子状态,故将恒星物质近似看成只有平动的理想气体。绝热过程满足  $P \propto \rho^\gamma$ ; 其中绝热指数(定义为定压热容  $C_p$  与定容热容  $C_v$  之比)  $\gamma = 5/3$ 。维

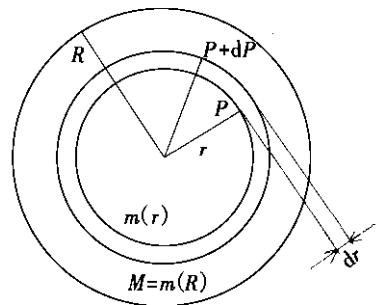


图 1 恒星的流体静力学平衡

Fig. 1 Hydrostatic equilibrium of stars

1) 国家自然科学基金(10273001)和国家重点基础研究专项基金(G2000077602)资助项目

收稿日期: 2002-06-24; 修回日期: 2002-07-09

持恒星处于流体静力学平衡的因素有二:压力  $f_p$  和引力  $f_g$ 。密度  $\sim M/R^3$ , 故  $f_p \sim R^2 P \sim M^{5/3}/R^3$ 。将此式写成等式的形式:  $f_p = \rho_1 M^{5/3}/R^3$ , 其中  $\rho_1$  为一常数。恒星所受引力一般可以写成  $f_g = \rho_2 M^2/R^2$ , 其中  $\rho_2$  为另一常数。因此, 运用 Newton 第二定律即可得到描述恒星半径变化的动力学方程

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = f_p - f_g = \frac{\rho_1 M^{5/3}}{R^3} - \frac{\rho_2 M^2}{R^2} \quad (2)$$

注意上式是一个半定量的动力学方程; 可以理解为描述了恒星以  $m(r) = M/2$  为分界面的两部分物质之间的相互作用, 它反映了恒星整体的力学平衡行为。设处于  $f_p = f_g$  的平衡态时  $R = R_0$ , 据(2)式有

$$R_0 = \frac{1}{\rho_2 M^{1/3}} \quad (3)$$

定义  $R - R_0 = \delta R$ , 并认为非平衡状态处于平衡态附近,  $|\delta R| \ll R_0$ 。

首先用(2)式来定性分析非平衡状态下的受力。若  $R > R_0$ , 物质所受引力减小比压力减小慢; 故引力是主要的恢复力, 恒星收缩使得  $R \rightarrow R_0$ 。反之当  $R < R_0$ , 压力的增加比引力快使得  $R$  增大, 恢复力主要是压力。定量地, 将  $1/R^3$  和  $1/R^2$  分别在  $R_0$  附近展开,

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{R_0^3} - \frac{3}{R_0^4} \delta R + \frac{6}{R_0^5} \delta R^2 + \dots, \quad \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_0^2} - \frac{2}{R_0^3} \delta R + \frac{3}{R_0^4} \delta R^2 + \dots$$

代入(2)式, 略去  $\delta R^2$  及更高项, 并考虑到(3)式, 有

$$\frac{d^2 \delta R}{dt^2} + \frac{\rho_2 M}{R_0^3} \delta R = 0$$

此式就是振子方程, 具有周期为

$$P = 2 \sqrt{\frac{R_0^3}{\rho_2 M}} = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_2}} \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (4)$$

的解, 其中  $\bar{\rho} = M / \left( \frac{4}{3} R_0^3 \right)$  为平均密度。这里的简单分析给出了熟知的事实: 恒星振动周期是与其平均密度相关联的<sup>[1]</sup>。恒星发生径向绝热振荡时, 引力势能和气体内能互相转换, 亦有周期性变化。压缩或膨胀时导致温度变化, 从而引起恒星光度发生周期性变化。由此看来周期  $P$  是可测量的, 并根据(4)式就能够得到恒星内部的平均密度。恒星的发光能力(即光度)依赖于其内部的核合成速率, 而这个速率是与平均密度有关的。所以, 在恒星的光变周期与光度之间应该存在某种内禀关系; 称为周光关系。观测表明一些恒星(如造父变星)的光变周期与光度之间确实存在着很好的正相关。

周光关系是某些天体距离测量的理论根据。平直时空中, 实际测量得到的光的流量  $F$  与反映恒星本身辐射光能力的物理量(光度  $L$ ) 具有如下关系

$$L = 4 \pi D^2 F, \quad (5)$$

其中  $D$  为恒星的距离。利用物理方法测量天体距离的关键在于寻找一种与光度  $L$  有物理关联的易于测量的物理量  $X$ ,  $L = L(X)$ 。因  $F$  是可观测量, 通过测得的  $X$  定出  $L$  后, 就可以由(5)式求出距离  $D$  了。天文学上一类重要的测量距离的方法是造父变星法, 选  $X$  为光变周期  $P$ 。通过周光关系给出  $L$ , 从而定出距离  $D$ 。这种测量距离的方法, 在天文学上有“量天尺”之

美喻。天文学家哈勃就是用此方法证认了星系的存在。

在结束本文之前,还将讨论两点:1) 关于绝热近似。压强  $P$  与体积  $V$  间一般满足多方关系:  $pV^n = \text{常量}$ , 其中  $n$  称为多方指数。在等温和绝热的准静态过程中  $n$  分别取 1、 $\infty$ ;  $n > 1$ 。实际过程往往并非严格地等温或绝热,取  $1 < n < \infty$ 。具体的恒星模型计算将发现,振荡周期远小于恒星内部热导或辐射传能时标;因此这里所作绝热近似是可靠的。2) 多方指数小于或等于  $4/3$  时,恒星不可能稳定存在。此时压力和引力均遵循  $1/R^2$  关系;半定量的动力学方程将成为  $\ddot{R} \sim 1/R^2$ 。若其中的比例系数大于 0,则恒星将膨胀;反之,恒星收缩。事实上,将这些概念应用于讨论由费米子组成的冷星时就能够得到结论:这类恒星存在极限质量(称为昌德拉塞卡极限)。

### 参 考 文 献

- 1 周又元,全茂达,马善贤. 天体物理、电路分析、脉冲分析. 合肥:中国科学技术大学出版社,1990

## The Gravitational Equilibrium of Spherically Symmetric Stars and the Oscillation near the Equilibrium

XU Renxin QIAO Guojun

(School of Physics, Peking University, Beijing, 100871)

**Abstract** The relation between the stellar oscillation frequency and the average density is obtained by a semi qualitative consideration of the equilibrium between gravity and pressure. It is explained to measure a stellar distance according to a period-luminosity relation.

**Key words** stars; gravitational equilibrium; Cepheid variables

\* \* \* \* \*

### 校内要闻

## 李政道先生入住北大新居 将促进物理学科发展

4月4日,我校荣誉教授、诺贝尔物理学奖获得者李政道先生在其北京大学燕南园寓所举行招待会,邀请我校党委书记闵维方、校长许智宏出席招待会,感谢我校校领导和有关部门为其在北京大学的新居所做的一切安排与服务。李政道先生20世纪80年代在北京创办北京现代物理研究中心(中心地址在北大校内)并担任主任,多年来十分关心我国物理学科发展情况,曾多次来校为学生做报告、指导科学研究。现在北京大学为其安排了新居,他表示今后每年将来校居住一段时间,这对我校物理学科的发展无疑具有重要的意义。应邀出席招待会的还有副校长兼秘书长林钧敬、副校长郝平、我校物理学院院长叶沿林、物理学院教授甘子钊及学校职能部门负责人等。

(摘自北京大学新闻网 2003-04-17)