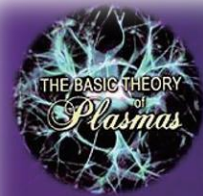


《天体物理学》

第三章 磁化等离子体

讲授：徐仁新

北京大学物理学院天文学系



(2013)

电浆基本理论

电浆

科学出版社

什么是等离子体 (plasma) ?

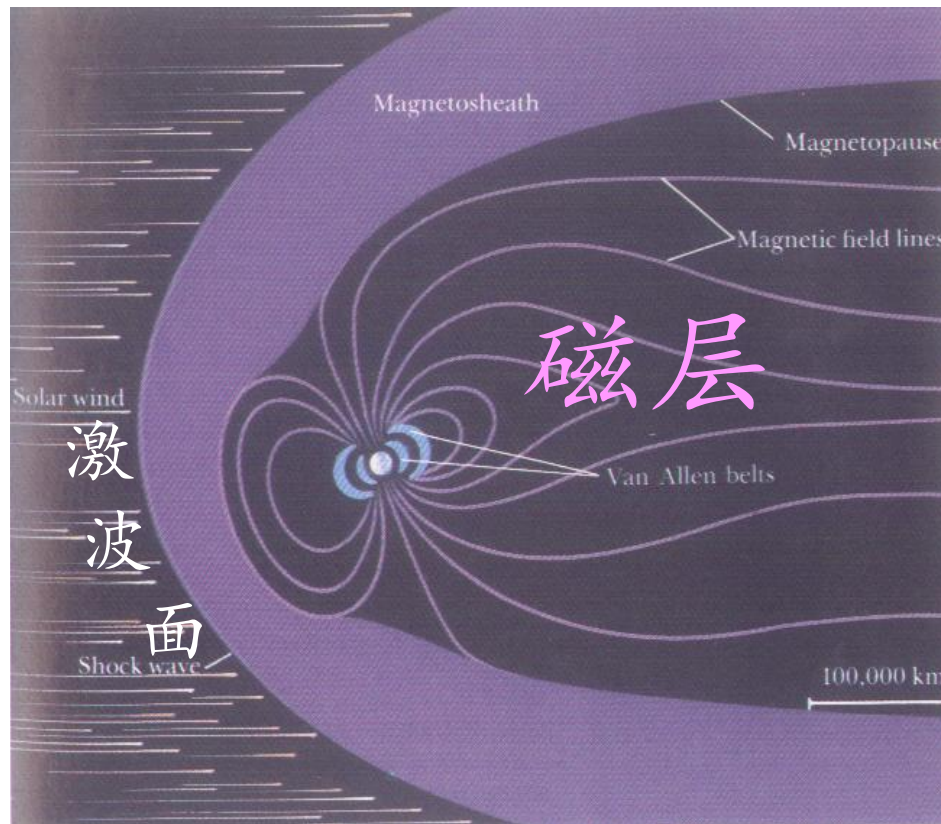
- 出现**显著**自由电子和离子的流体
(整体电中性但局部存在电磁作用。台：电浆)
- 相对一般流体，等离子体有何**特性**?
 - 中性流体**：运动 $\rightarrow$ 压力；粒子间碰撞 $\rightarrow$ 粘性
 - 等离子体**：粒子间额外附加了**较长程**的电磁作用
- 等离子体往往具有**磁场**
 - 长程电磁力** $\rightarrow$ 电流 I (导电流体)
 - $\rightarrow$ 磁场 B (磁化等离子体)
 - 流体与场间耦合： $I \rightarrow B \rightarrow I' \rightarrow B' \rightarrow \dots$
- $>99\%$ 宇宙**正常物质**为磁化等离子体

1, 天体磁场的普遍性

磁场的普遍性 $\Leftrightarrow$ 电流的普遍性

地球磁场与地球磁层 (magnetosphere) :

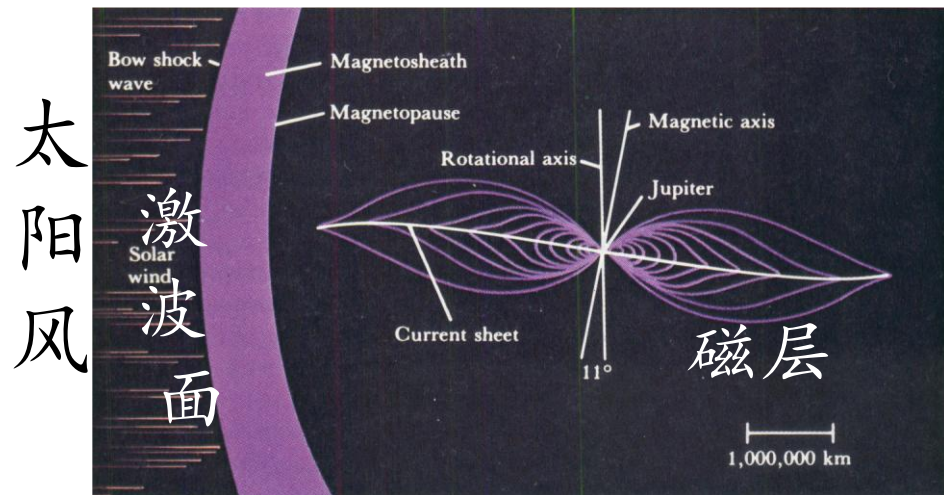
太阳风



磁尾

天体磁场的普遍性

行星磁层与偶极磁场:



木星的磁层

磁倾角

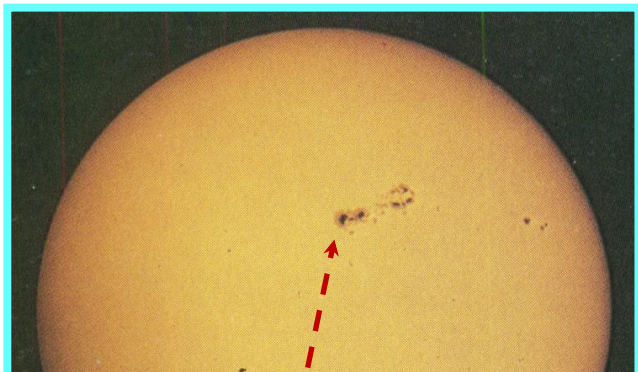
$$\mu \sim BR^3$$

行星名称	极区磁场(G)	磁偏角	总磁矩(G cm ³)
水星	$\sim 7 \times 10^{-3}$	12°	5.2×10^{22}
地球	0.6	11°	7.94×10^{25}
火星	$\sim 10^{-3}$	15°	2.5×10^{22}
木星	~ 8	10.8°	1.4×10^{30}
土星	~ 1	0.7°	4.6×10^{28}

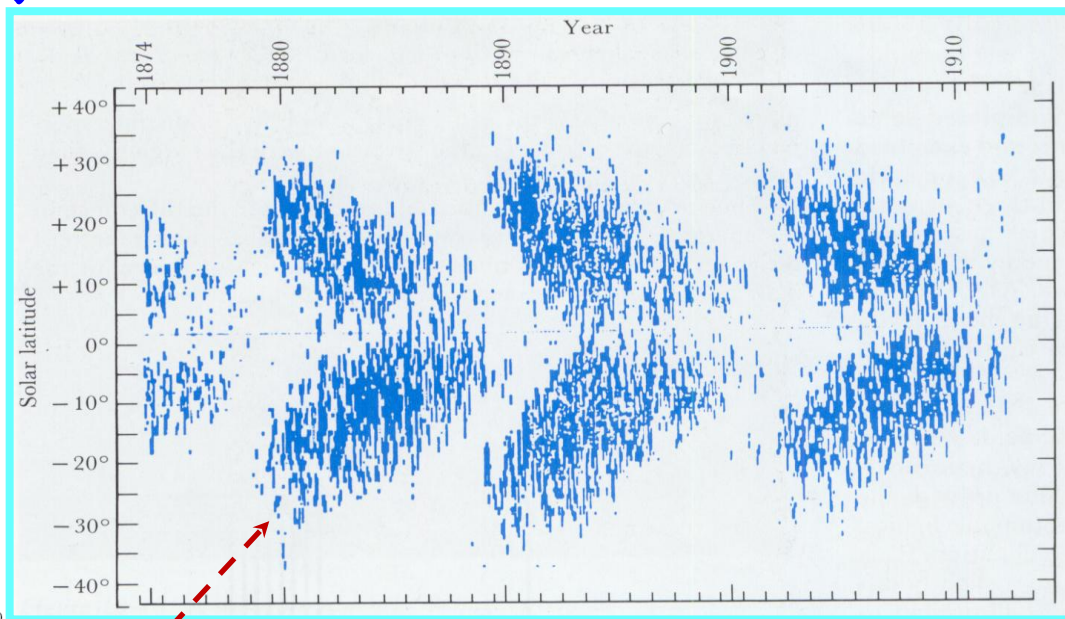
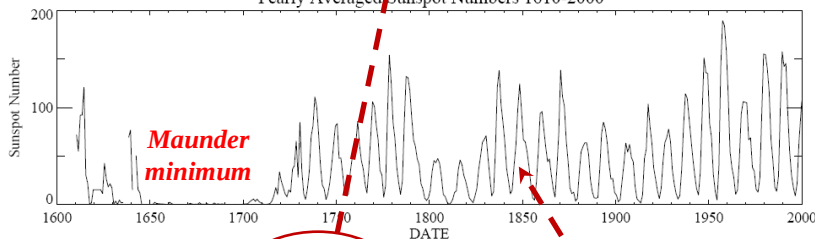
行星偶极磁场

天体磁场的普遍性

太阳磁场与太阳黑子:



Yearly Averaged Sunspot Numbers 1610-2000

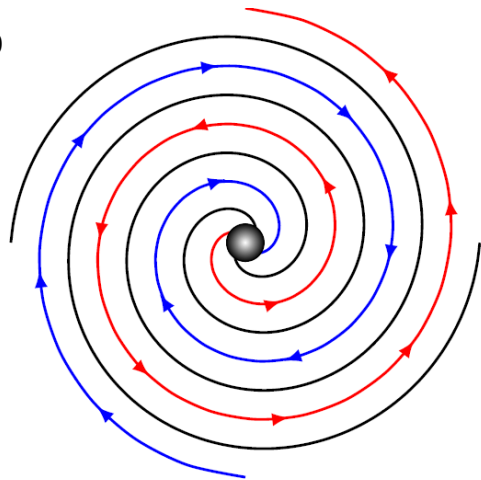


- 太阳黑子是太阳表面磁场较强 ($\sim 10^3\text{G}$) 区域
- 黑子数随时间周期性 (11年) 改变, 改变极性
- 存在微弱偶极磁场 (约 $1\sim 2\text{G}$)

天体磁场的普遍性

行星际磁场:

Pétri J. Plasma Phys. (2016)
vol. 82, 635820502



- 以太阳为中心，行星际空间可以分成几个扇形磁场区域；每个区域磁场的极性相同，而相邻区磁场极性相反
- 行星际的扇形磁场结构以太阳自转周期（~27天）随太阳一起旋转

FIGURE 11. The Parker spiral structure of the solar wind. Outgoing field lines are shown in red, ingoing field lines in blue. The two black spirals correspond to places where magnetic polarity reverses. The same applies for the pulsar striped wind, see below.

恒星磁场： 主序星 $10^3 \sim 10^4 \text{G}$ ，白矮星 $10^5 \sim 10^7 \text{G}$ ，脉冲星 $10^8 \sim 10^{12} \text{G}$

银河系磁场： 星际空间约 $10^{-5} \text{G} \sim 10^{-6} \text{G}$ （即 μG 量级）

其他： 星系际磁场，星系团磁场，早期宇宙磁场

2, 等离子体中的电磁作用

Debye长度: 非电中性的典型力程

假设离子为电荷密度为 en_0 的均匀本底 $\leftarrow m_i \gg m_e$

$r=0$ 处试验电荷: $q>0$, 势 $\phi(r)$

电子数: $n_e = n_0 \times \exp[e\phi/kT]$

$r \gg 0$ 时, $e\phi/kT$ 是小量 $\Rightarrow$

$$n_e(r) \approx n_0 + n_0 (e\phi/kT)$$

$$\therefore \rho_e = e(n_0 - n_e) + q\delta(r)$$

$$\approx -en_0 (e\phi/kT) + q\delta(r)$$

$$\text{由 } \nabla^2 \phi = -4\pi\rho_e \Rightarrow$$

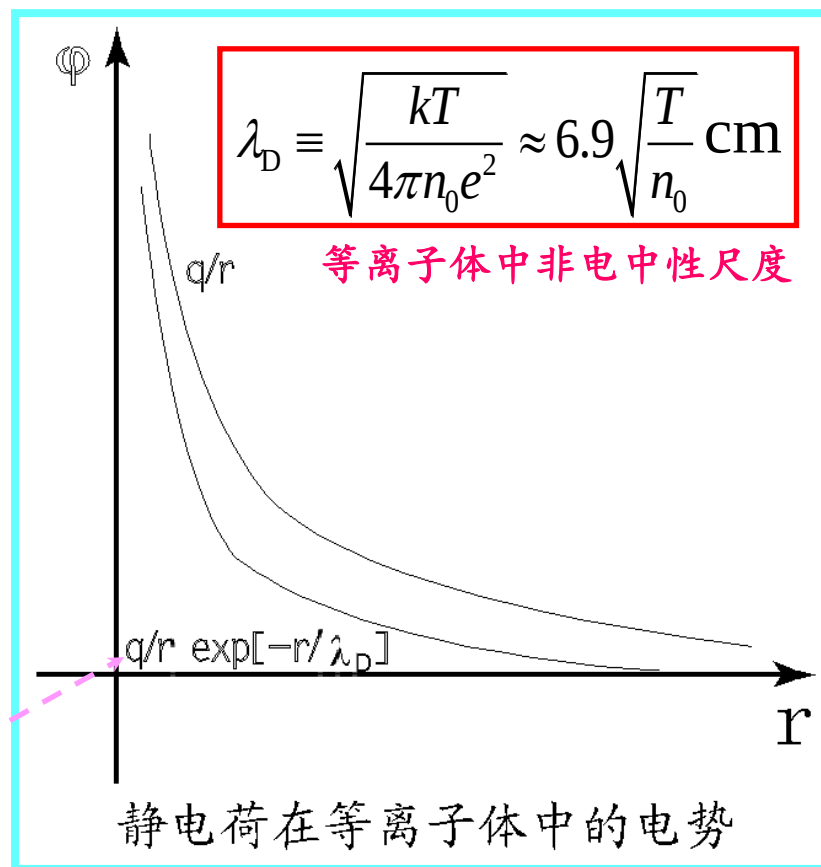
QED: 屏蔽

$$U(1) \rightarrow \alpha_{\text{em}}$$

QCD: 反屏蔽

$$SU(3) \rightarrow \alpha_s$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\lambda_D^2} \phi = -4\pi q \delta(r)$$



等离子体中的电磁作用

等离子体频率：恢复电中性的典型**时标**

假设有一平面层电子移动了 x 距离

⇒ 类似于平板电容器的电场 E

电子“板”的面电荷密度为 en_0x

$$\Rightarrow E = 4\pi en_0x$$

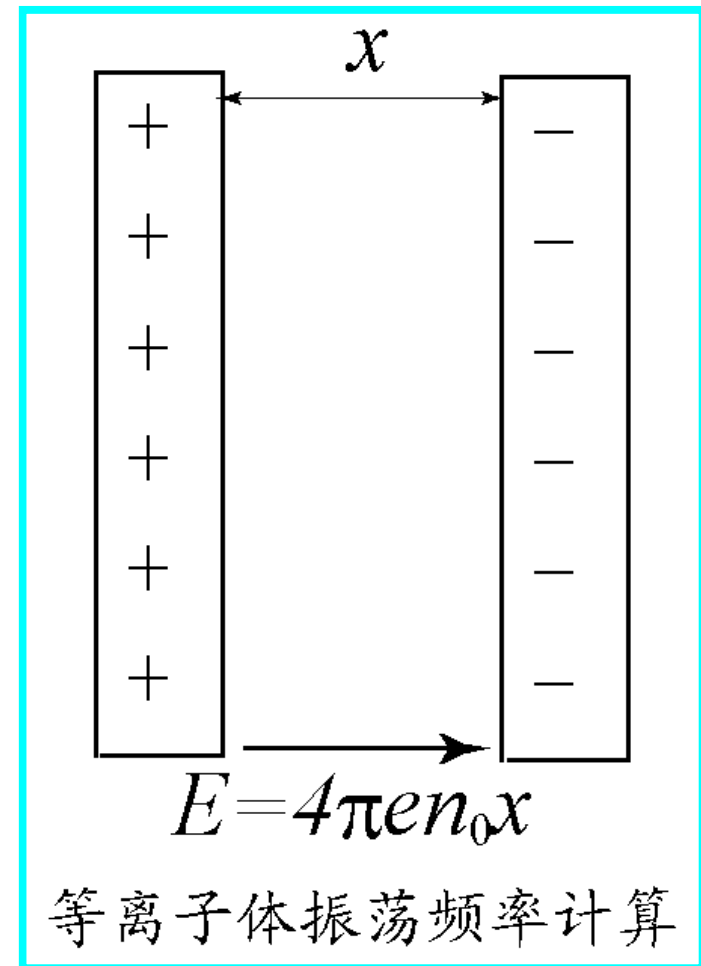
⇒ 电子运动方程（谐振子）：

$x \sim n^{-1/3}$ ：
粒子间距量级

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi n_0 e^2 x$$

频率为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}} = 5.6 \times 10^4 \sqrt{n_0} \text{ s}^{-1}$$



等离子体中的电磁作用

等离子体频率的意义

若外界电磁扰动的频率比 ω_p 低，等离子体中自由电荷的分布将迅速调整，使得电磁扰动不能在等离子体中传递 $\Rightarrow$

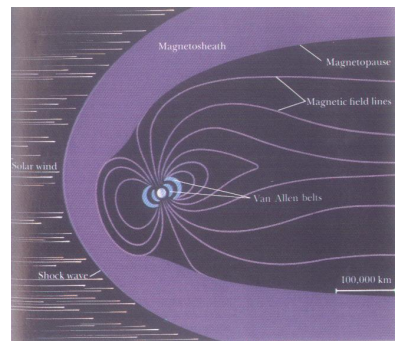
只有 $\omega > \omega_p$ 的电磁波才能在其中传播

例：大气射电窗口低频段被电离层吸收

3, 磁流体力学

等离子体方程组：动力论

单粒子
轨道理论
处理
极光



从统计力学角度考虑带电质点所受电磁力以及之间碰撞

磁流体近似：磁流体力学 (MHD)

做流体单元近似：宏观上非常小，但微观粒子非常多

磁流体力学方程组：

= 流体力学方程组 + Maxwell方程组

+ 流场与电磁场的耦合 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$

磁流体力学

方程组具体形式:

- 连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Lorentz力

- 动量方程 (NS方程)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

- 感应电流

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B})$$

- Ampère定律: $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{B}$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

- Faraday定律: $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{J}$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- 能量方程 (理想流体) $P\rho^{-\gamma} = \text{const.}$

ρ 、 p 、 v 、 J 、 B 、 E 共14个
未知标量

=
14个标量方程

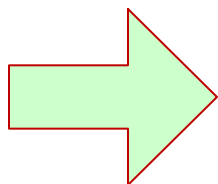
磁流体力学

Lorentz力 (导电流体区别于中性流体的**关键**) **的性质**:

Ampère定律 + 矢量关系 $\nabla(B^2) = 2(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} + 2\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right)$$

动量方程: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{v}$



合并成一项 $-\nabla[p + B^2/(8\pi)]$: 等效于在原压强 p 的基础上附加了新的各向同性的压强 $P_B \equiv B^2/(8\pi) \Rightarrow$ **磁压***

*无序湍动磁流体各向同性 $P = B^2/(24\pi)$, 是磁能密度 $B^2/(8\pi)$ 的 1/3 倍。

磁流体力学

Lorentz力的性质:

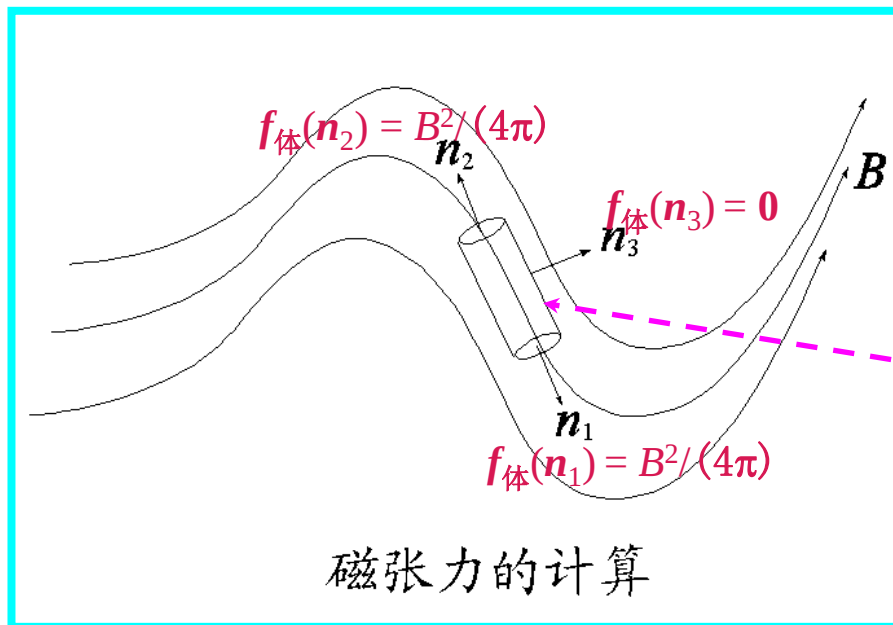
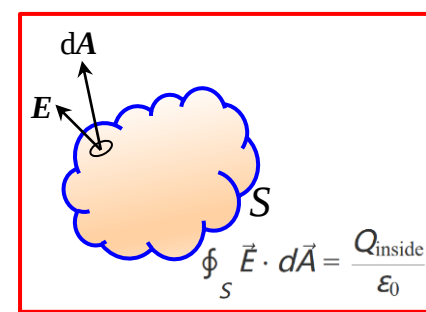
Ampère定律 + 矢量关系 $\nabla(B^2) = 2(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} + 2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \vec{B} \vec{B})$$

广义Stokes公式: $\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega$

$$\begin{aligned} f_{\text{体}} &= \int_{\text{柱体}} \nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B}) / (4\pi) dV \\ &= \int_{\text{柱面}} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B}) / (4\pi) ds \\ &= \int_{\text{柱面}} B_n \mathbf{B} / (4\pi) ds \end{aligned}$$

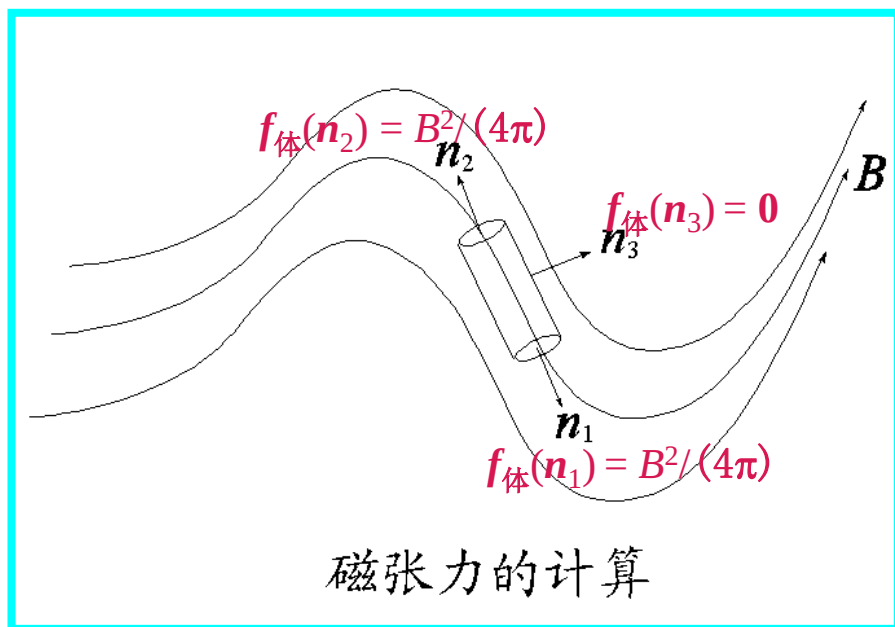


磁流体力学

Lorentz力的性质:

Ampère定律 + 矢量关系 $\nabla(B^2) = 2(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} + 2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right)$$



沿力线方向: $T = \frac{B^2}{4\pi}$

可传播横波, 速度:

Alfvén波

1970年Nobel奖

$$v_A = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

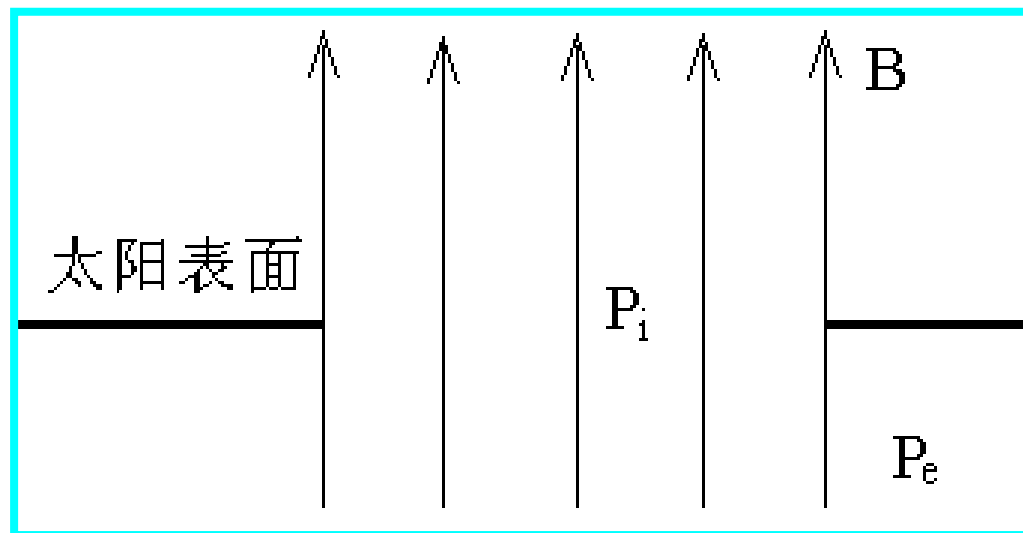
磁流体力学

Lorentz力的性质：总结

Lorentz力 = 磁压 p_B + 张力 T ; $P_B = \frac{B^2}{8\pi}$, $T = \frac{B^2}{4\pi}$.

Lorentz力应用之一：太阳黑子

- 忽略黑子区外磁场
- 理想气体压强 $P_e = n_e k T_e$
- 黑子区: $P_i = n_i k T_i + P_B$
- 力学平衡: $P_i = P_e \Rightarrow$
 $n_i T_i < n_e T_e$
- 太阳表面, $n_i \sim n_e$
 $\Rightarrow T_i < T_e$



磁流体力学

感应方程：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \times: \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}) \oplus \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \oplus \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow$$

感应方程：

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}$$

其中 $\eta_m = c^2/(4\pi\sigma)$ ，称为磁粘滞系数

特例1： $\vec{v} = 0$ $\partial \vec{B}/\partial t = \eta_m \nabla^2 \vec{B} \Rightarrow \eta_m \nabla^2 \vec{B}$ 磁扩散项

特例2： $\sigma \rightarrow \infty$ $\partial \vec{B}/\partial t = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow$ 磁冻结现象

磁Reynolds数：

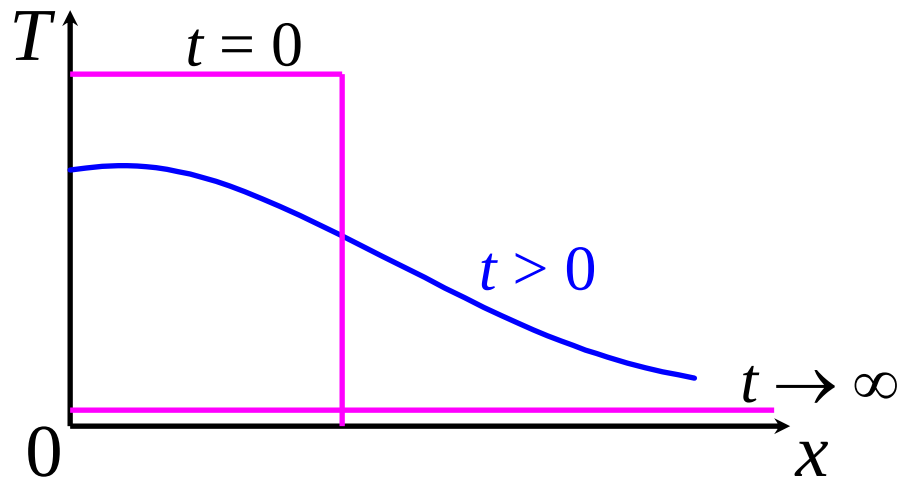
$$R_m \equiv \frac{LU}{\eta_m} \sim \frac{\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})}{\eta_m \nabla^2 \vec{B}} \sim \frac{UB/L}{\eta_m B/L^2}$$

天体环境 $R_m \gg 1 \Rightarrow$ 磁冻结

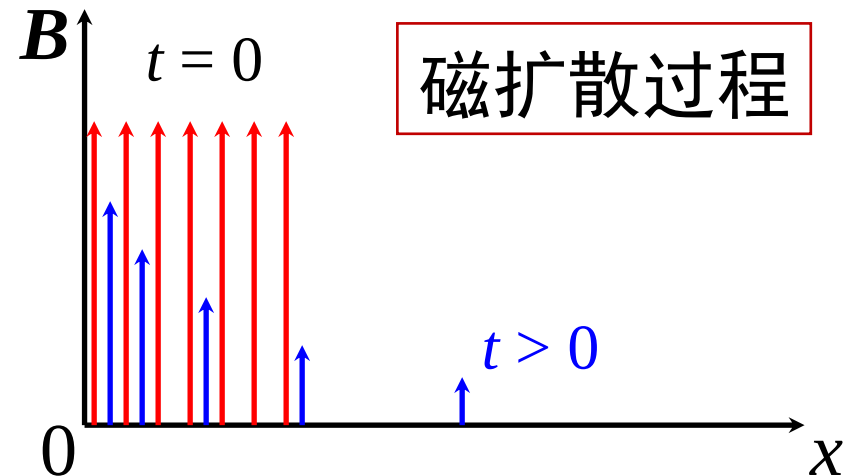
磁流体力学

特例1: $\mathbf{v} = 0$ $\partial B / \partial t = \eta_m \nabla^2 B \Rightarrow \eta_m \nabla^2 B$ 磁扩散项

热传导方程: $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T$



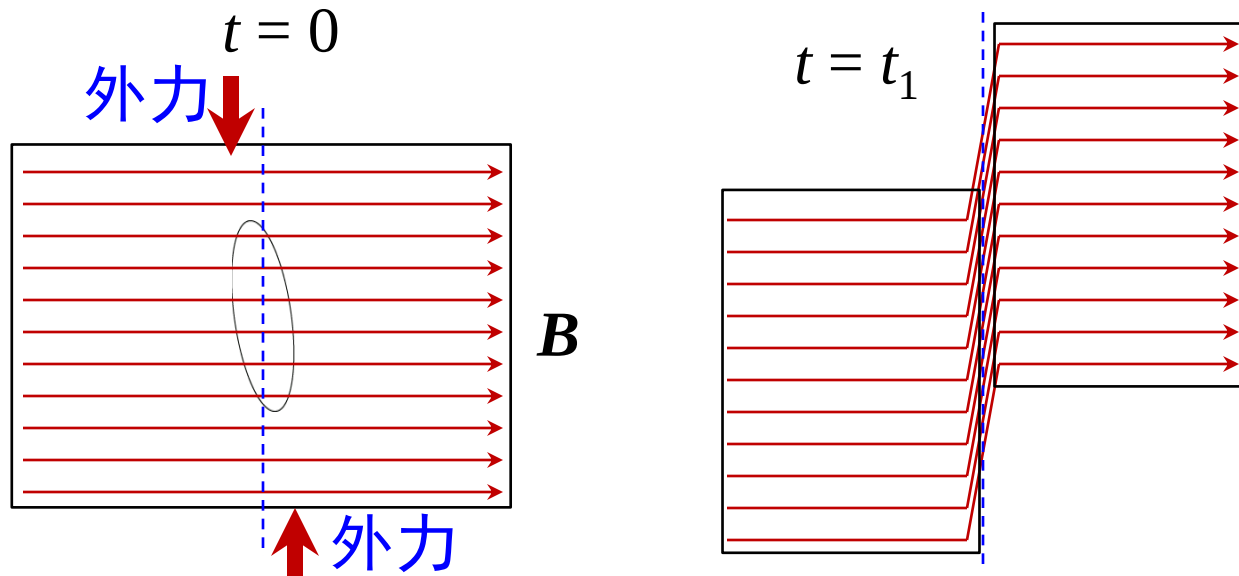
磁扩散方程: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta_m \nabla^2 \vec{B}$



磁流体力学

特例2: $\sigma \rightarrow \infty$ $\partial B / \partial t = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 磁力线好似“冻结”于流体

随磁流体元一起运动的任意闭环内的磁通量不随时间改变!



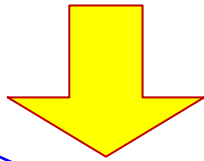
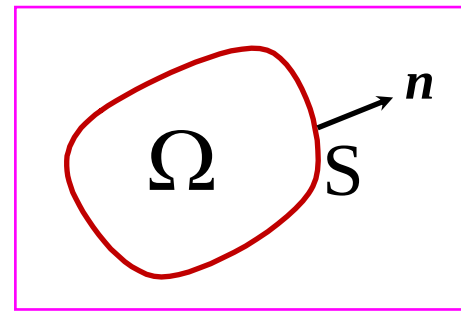
外力克服磁张力
做功，使得磁能
增加：这是一种
机械能转化为磁
能的过程

4, 天体磁场的起源

较小尺度磁场的起源：**发电机**(dynamo)理论

基本方程为感应方程：(dynamo equation)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{B^2}{8\pi} dV = -\frac{c}{4\pi} \oint_S \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) ds - \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} J^2 dV - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v} dV$$

磁能增加

Poynting流

Ohm耗散

Lorentz力作功

$\therefore$ 发电机作用本质上是将动能转化为磁能的过程

天体磁场的起源

运动学发电机 (kinematic dynamo) :

- 场 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{B}$ 一般不易解析甚至数值求解
- 假设 $\mathbf{v}$ 给定 (如 $\rho v^2 \gg B^2$) $\Rightarrow$ 运动学发电机
- 平均场发电机理论:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}, \quad \langle \delta\mathbf{v} \rangle = 0; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}, \quad \langle \delta\mathbf{B} \rangle = 0$$

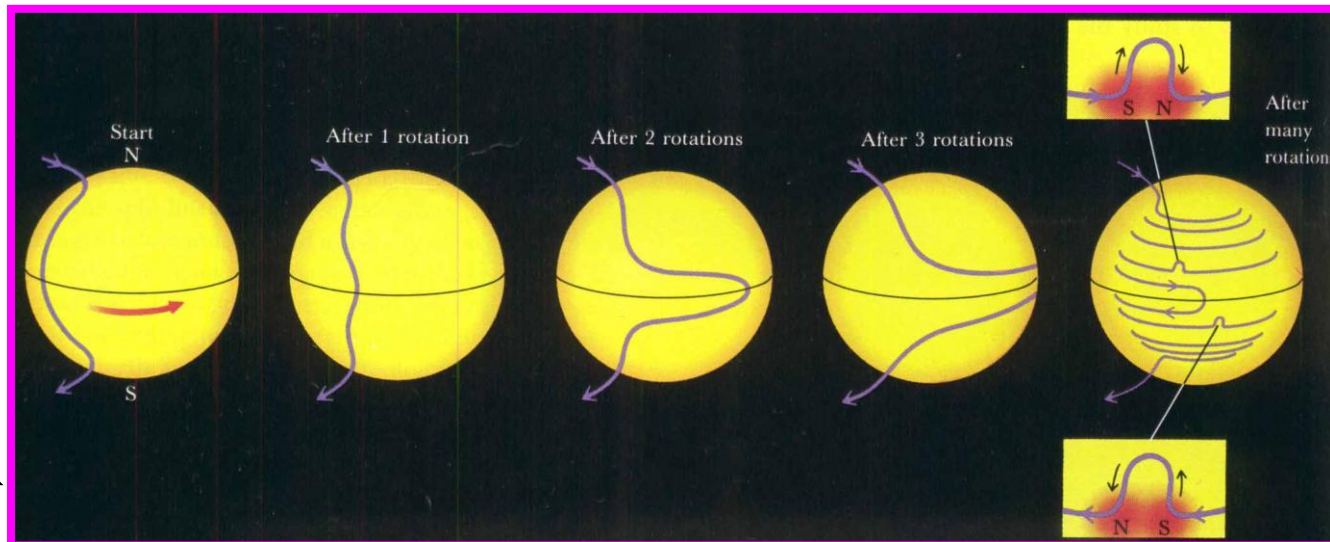
旋转流体...

- α 效应: 平均电动势 $\mathcal{E} = \alpha \mathbf{B}_0$

- Ω 效应:

较差自转
放大磁场

例子:
太阳、行星



总 结

- 0, 什么是等离子体?
- 1, 天体磁场的普遍性
- 2, 等离子体中的电磁作用
- 3, 磁流体力学
- 4, 天体磁场的起源

作业

2. 如果认为太阳黑子区内外密度相同,只是黑子区内磁场(约 1000 G)远大于区外磁场(约 50 G). 观测上由黑体谱可推测黑子区内温度比区外温度(约 6000 K)低约 2000 K. 试估计太阳发光区的物质密度(假设太阳光球由氢原子组成,忽略氢的电离).
3. 试估计恒星塌缩过程中磁场与半径的关系.(提示:磁冻结)