

《天体物理学》

第四章 主序恒星

讲授：徐仁新

北京大学物理学院天文学系

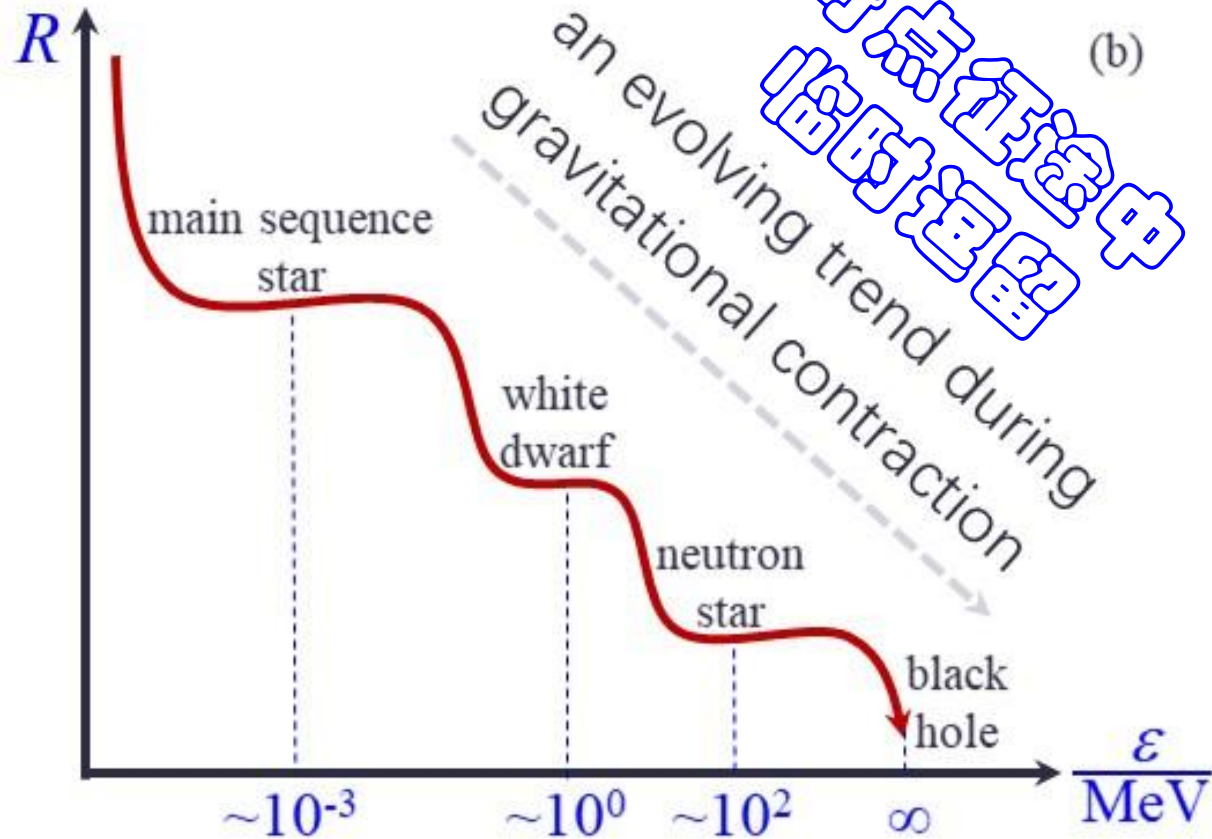
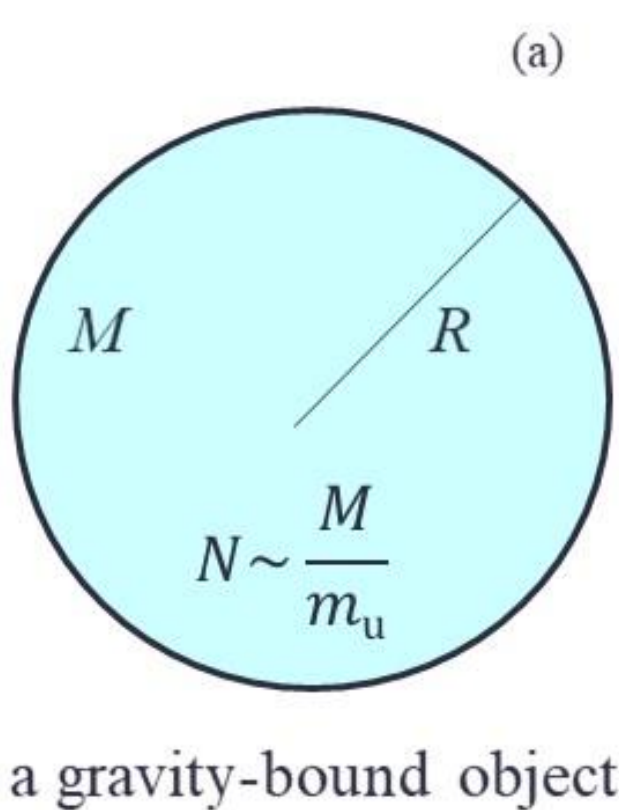
什么是恒星?

(为何天上要“挂”着星星让我们看?)

“奇点定理”与物质观



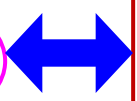
- 是重元素核合成的熔炉
- 是构成星系的基本单元



物质循环

1, 恒星演化概貌

分子云



- 位于恒星际空间
- 温度 $\sim 10^1$ K \Rightarrow 分子
- 密度 $\sim 300-200$ 个 H_2 分子/ cm^3
- 尺度 ~ 40 pc
- 主要成分： H_2 ，混有 CO 、 H_2O 、 NH_3 、 CS 、 CH_3OH （甲醇）、 H_2CO （甲醛）等其它百余种无机或有机分子；此外，还含有约1%的由碳、硅、脏冰等构成的尘埃（ $\sim \mu m$ 大小，含几万个原子）

“原子云”
(HI, 10^2 K)

“离子云”
(HII, 10^4 K)

引力塌缩

原恒星

点燃 1H 聚变($4p \rightarrow \alpha$)

主序星

热脉动

行星状星云

电子简并
物质核心

超新星

黑洞

中子星

白矮星

致密残骸
“舍利子”

恒星演化概貌

恒星如何演化很大程度上依赖于初始质量

初始质量	氦核心质量	演化结局	
		单星	双星
$< 2.3 M_{\odot}$	$< 0.45 M_{\odot}$	CO 白矮星	氦白矮星
$2.3 M_{\odot} - 6 M_{\odot}$	$0.5 M_{\odot} - 1.9 M_{\odot}$	CO 白矮星	CO 白矮星
$6 M_{\odot} - 8 M_{\odot}$	$1.9 M_{\odot} - 2.1 M_{\odot}$	O-Ne-Mg 白矮星 或碳爆燃超新星爆发?	O-Ne-Mg 白矮星
$8 M_{\odot} - 12 M_{\odot}$	$2.1 M_{\odot} - 2.8 M_{\odot}$	中子星	O-Ne-Mg 白矮星
$12 M_{\odot} - 25 M_{\odot}$	$2.8 M_{\odot} - 8 M_{\odot}$	中子星	中子星
$> 25 M_{\odot}$	$> 8 M_{\odot}$	黑洞	黑洞

恒星初始质量及其演化结局

2, Jeans不稳定与恒星形成

Jeans不稳定: 热压不足对抗引力导致的**塌缩**

- 若只有引力，任何微小的密度涨落必将被引力无限放大而塌缩
- 因存在热压力，较小密度涨落产生的引力收缩被热压所克服
- 只有当密度涨落足够高以致于热压相对于涨落产生的引力而言可被忽略，引力塌缩（即引力不稳定性）才能够发生



- 引力 $\sim GM^2/R^2$ （质量 $M\sim R^3\rho$ ）
- 热压力 $\sim PR^2$ 为（理想气体 $P=\rho kT/m$ ）
- 引力 $>$ 压力 $\Rightarrow R > \lambda \sim \sqrt{\frac{kT}{G\rho m}}$

\therefore 当介质尺度大于 λ 时，自引力将导致不稳定

Jeans不稳定性与恒星形成

Jeans不稳定性：热压不足对抗引力导致的**塌缩**

- 对于均匀无穷大介质，通过线性小扰动计算“自引力介质”得到引力不稳定发生的临界长度为 λ_J ，只是多个因子 $(\pi)^{1/2}$ ，

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi kT}{G\rho m}} \quad \leftarrow \text{Jeans长度}$$

- 当密度扰动区域大于 λ_J 时，引力将导致塌缩
- 扰动最大长度为分子云尺度 L ，故定义Jeans密度和Jeans质量

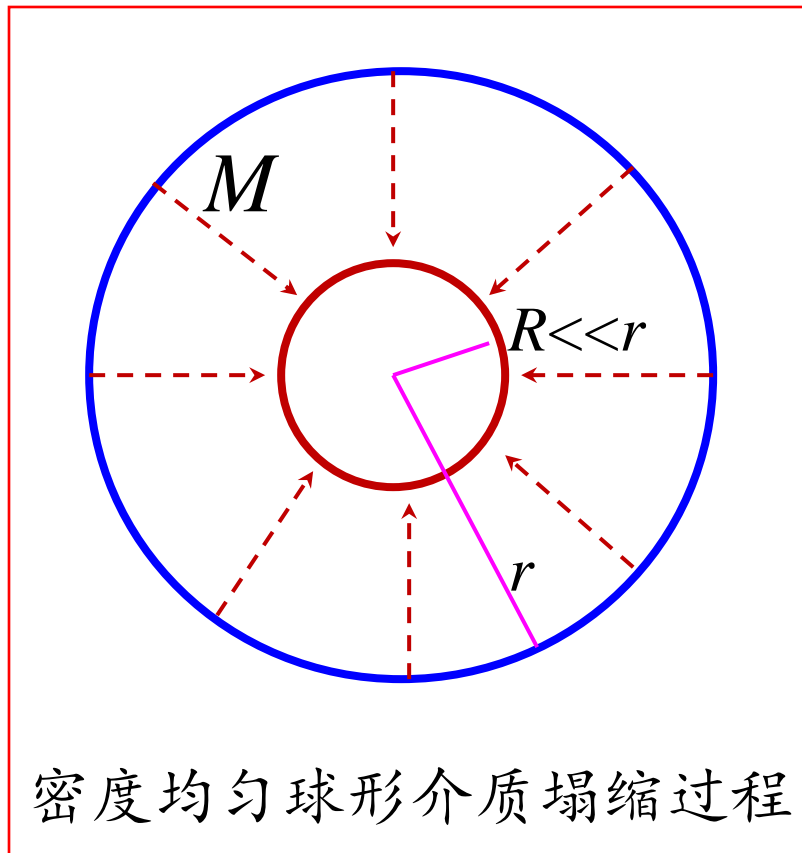
$$\rho_J = \frac{\pi kT}{GmL^2} \quad M_J \sim L^3 \rho_J$$

当 $\rho > \rho_J$ 或 $M > M_J$ 时，分子云必将引力塌缩

Jeans不稳定性与恒星形成

塌缩时标：~自由落体时标

- 塌缩时引力主导，介质的径向粘性可忽略 \Rightarrow 自由落体



- NR: 典型动能 $mv^2 \sim GMm/r$
 $\Rightarrow v \sim (GM/r)^{1/2}$
- 塌缩时标（自由落体时标）

$$\tau_{\text{ff}} \sim \frac{r}{v} \sim \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \sim 87 \left(\frac{M}{M_{\text{sun}}} \right)^{-1/2} \left(\frac{r}{10^{10} \text{ cm}} \right)^{3/2} \text{ S}$$

- 质量越大塌缩越快
(大质量恒星形成，铁核塌缩)

Jeans不稳定性与恒星形成

恒星形成：小质量情形

a, 形成缓慢旋转的分子云核。云核在收缩过程中也可能会分裂

Shu et al. (1987)

b, 原恒星的形成

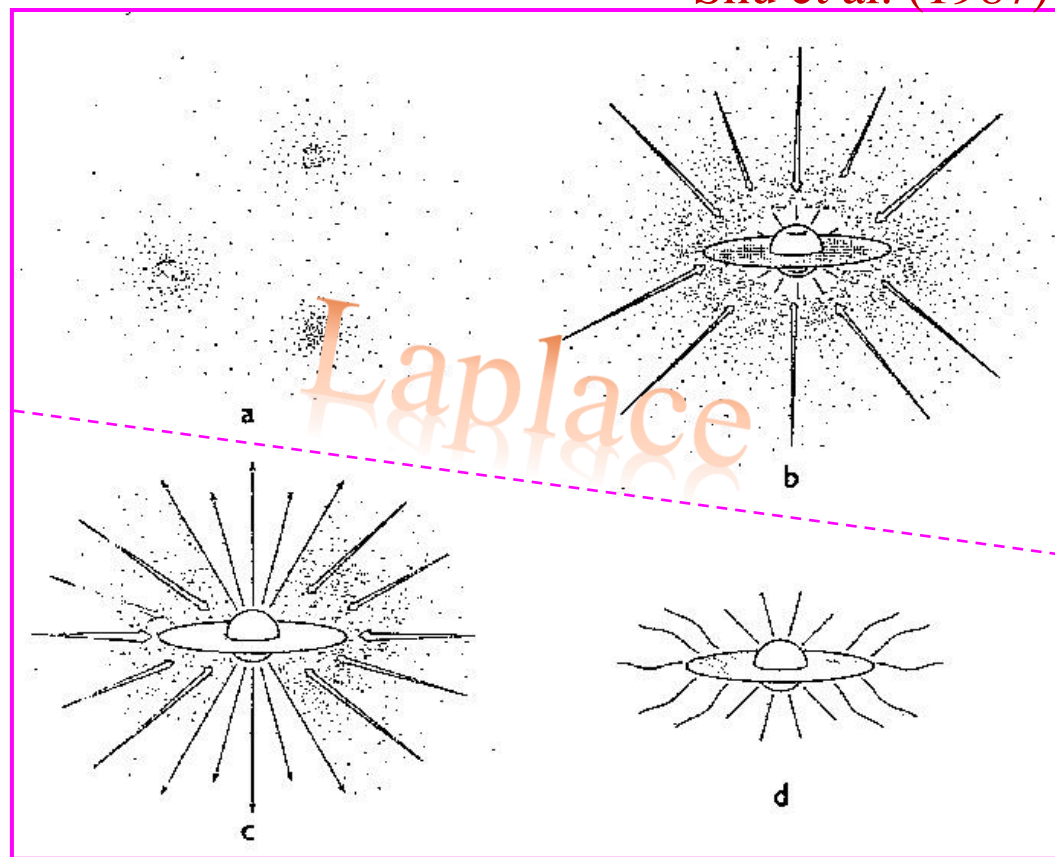
(^2D , ^7Li ...)

c, 氦燃烧 \Rightarrow 对流和较差自转

转 \Rightarrow 磁场放大 \Rightarrow 强烈星风

d, 稳定氢核燃烧的主序星

+ 盘 (行星)



大质量恒星形成研究的困难：

塌缩时标短 \Rightarrow 观测困难 \Rightarrow
观测对理论模型筛选不够

3, 周光关系

恒星处于平衡态附近的**振荡行为**:

- 假设震荡过程是绝热的, 满足 $P \propto \rho^\gamma$; 绝热指数 $\gamma = 5/3$

压力: $f_p \sim R^2 P \sim M^{5/3}/R^3$ (密度 $\rho \sim M/R^3$), 或 $f_p = \kappa_1 M^{5/3}/R^3$

引力: $f_g = \kappa_2 M^2/R^2$

⇒ 半定量地描述恒星半径变化的动力学方程:

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = f_p - f_g = \frac{\kappa_1 M^{5/3}}{R^3} - \frac{\kappa_2 M^2}{R^2}$$

- 平衡态: $R = R_0 = \kappa_1/(\kappa_2 M^{1/3})$

- 以 $\delta \equiv R - R_0$ 做小量展开, 且略去 δ^2 及更高项 ⇒ 振子方程

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{\kappa_2 M}{R_0^3} \cdot \delta = 0$$



$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{R_0^3}{\kappa_2 M}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\kappa_2}} \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

“周密”关系

周光关系

恒星处于平衡态附近的**振荡行为**：

- 对观测数据的统计发现：

$$\bar{\rho} \equiv \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 1.4 \left(\frac{M_{\text{sun}}}{M} \right) \propto M^{-1}$$

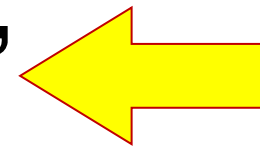
$$\text{又, } T_p = 2\pi \sqrt{\frac{R_0^3}{\kappa_2 M}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\kappa_2}} \frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}}}$$

“周质”关系

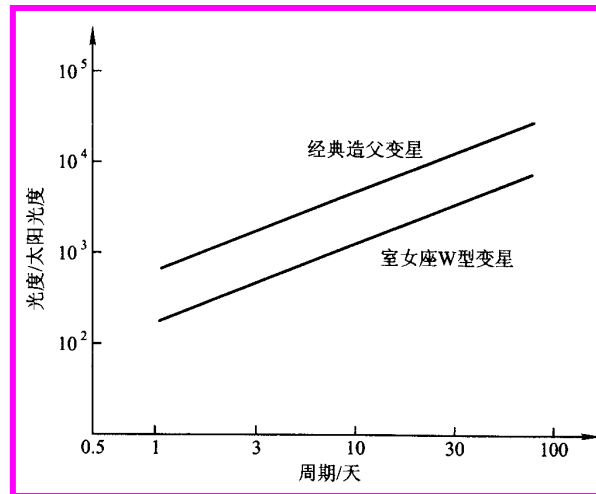
$$T_p \propto M^{1/2}$$

- 质量越大则发光越强

“量天尺”



周光关系



■ 1920: Shapley-Curtis大辩论

■ 1924: Hubble分辨出M31（仙女座大星云）中的造父变星，并根据“周光”关系测定距离，支持了Curtis的“宇宙岛”概念

4, Lane-Emden方程与“标准模型”

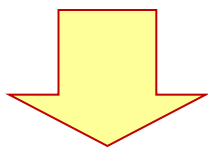
恒星的**流体静力学平衡**方程:

- 假设恒星具有球对称性 \Rightarrow 所有物理量 $Q = Q(r) \Rightarrow$ 一维问题

引力: $Gm(r) \cdot \Delta M / r^2$ (质量 $\Delta M = \rho \Delta A dr$)

压力: $\Delta A [P - (P + dP)] = -\Delta A \cdot dP$

- 引力 = 压力

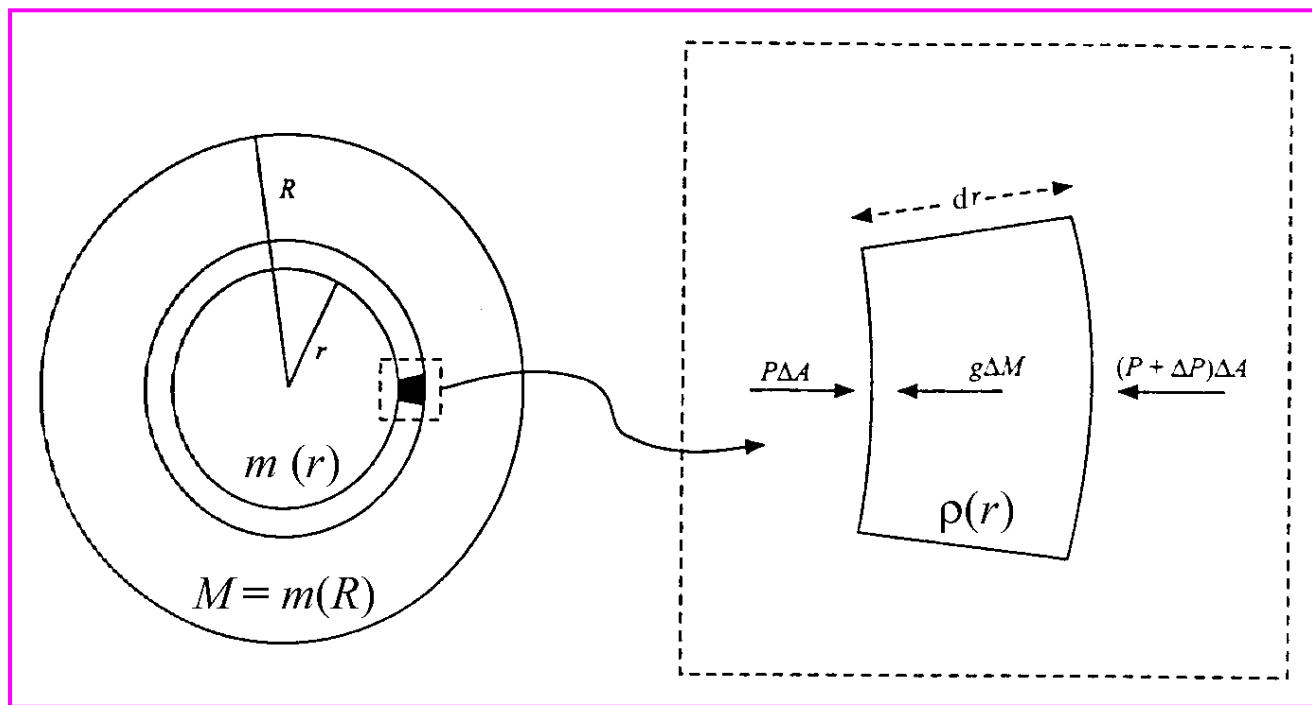


$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

Newton引力流体静力平衡

对比: Einstein引力

(理想流体**TOV**方程)



Lane-Emden方程与“标准模型”

流体静力平衡方程: $\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$
 (未知数: ρ, P)

其中 $m(r) = \int_0^r 4\pi\rho(x)x^2 dx$

状态方程: $P=P(\rho)$; 多方形式 $P = K\rho^\gamma$

Lane-Emden方程:

$$\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta^n = 0$$

$\gamma = 1 + 1/n$

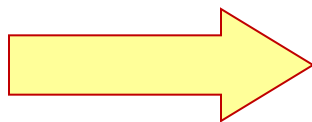
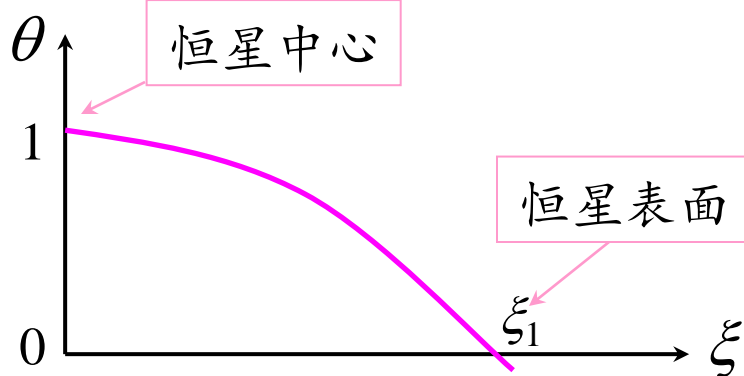
这里定义了新标度的密度变量 θ 和矢径坐标 ξ :

$$\rho = \rho_0 \theta^n; \quad r = a\xi, \quad a = \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_0^{\frac{1}{n}-1}}$$

边条件:

$$\begin{cases} \theta(0) = 1 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

$\gamma > 6/5$ 时
解的示意



Lane-Emden方程与“标准模型”

数值求得 ξ_1 和 $\theta'(\xi_1)$ 后就可以得到**质量**和**半径**:

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_0^{(1-n)/2n} \xi_1$$

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_0^{(3-n)/2n} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

或消去 ρ_0 得**质量-半径关系**:

$$M = 4\pi R^{(3-n)/(1-n)} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{n/(n-1)} \xi_1^{(3-n)/(n-1)} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

数值解**示例**: $\gamma=5/3$ 、 $4/3$ 情形

$$\gamma = 5/3, n = 3/2, \xi_1 = 3.65375, \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.71406$$

$$\gamma = 4/3, n = 3, \xi_1 = 6.89685, \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.01824$$

Lane-Emden方程与“标准模型”

恒星可以近似为由辐射压不可忽略、非简并理想气体组成的，其**状态方程**为：

$$P = \left[\left(\frac{N_A k}{\mu} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3} \quad (\text{习题1})$$

N_A : Avogadro常数, μ : 平均分子量, β : 气体压与总压强之比, a : 辐射密度常数

标准模型即此状态方程多方球 ($n = 3$) 而描述的主序星

$$\longrightarrow T_0 = 2.923 \times 10^{-16} \mu \beta M^{2/3} \rho_0^{1/3} = 1.106 \times 10^{-15} \mu \beta M^{2/3} \bar{\rho}^{1/3} \left. \vphantom{T_0} \right\}$$

统计关系: $\bar{\rho} \equiv \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 1.4 \left(\frac{M_{\text{sun}}}{M} \right)$

1 K ~ 10⁻⁴ eV

$\mu = 0.7, \beta \sim 1$

$$T_0 \approx 1.4 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_{\text{sun}}} \right)^{1/3} \text{ K}$$

恒星质量越小中心
温度越低但密度却
越高 (习题2) !

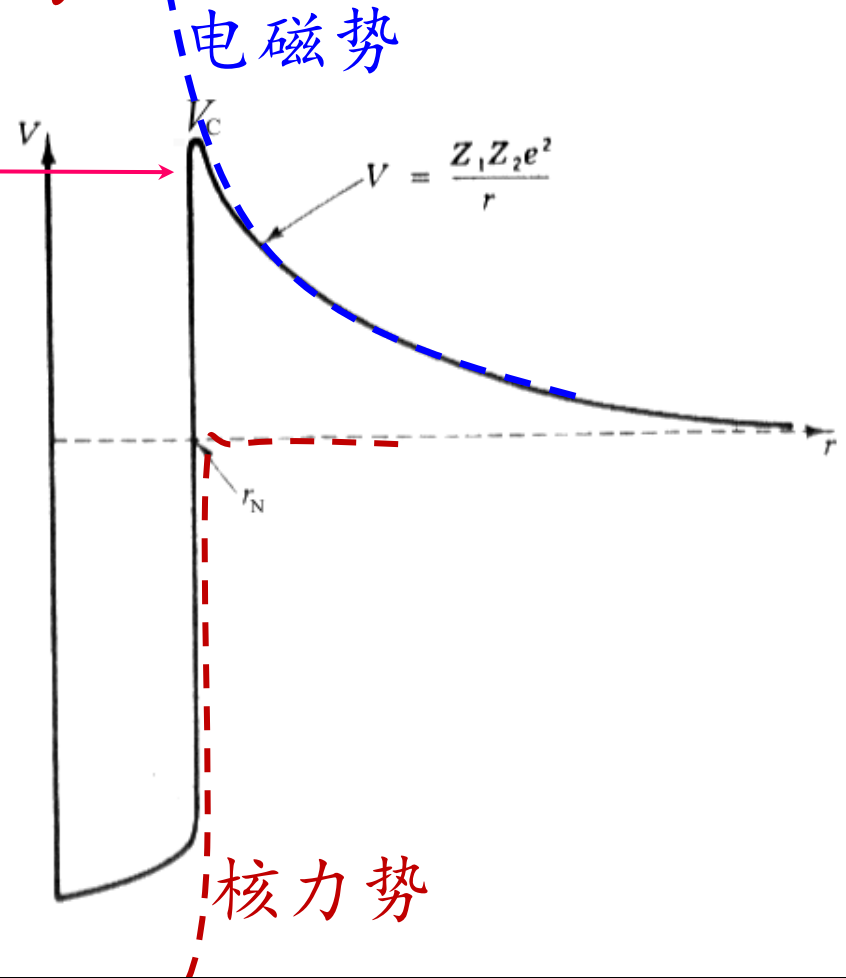
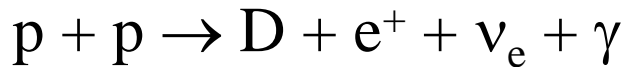
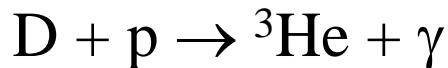
5, 核燃烧条件

恒星内部能进行核反应吗?

核Coulomb势垒

$$V_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{N1} + r_{N2}} \approx 1.2 \frac{Z_1 Z_2}{A_1^{1/3} + A_2^{1/3}} \text{ MeV} \gg kT_0$$

例如: (为何Dp比pp反应更有效?)



核燃烧条件

~1840: Mayer达爪哇放血治疗...能量守恒

...太阳能源? 烧陨星?

1854: Helmholtz提出缓慢收缩放能

每年收缩约35米! 两千万岁?

恒星为何发光?

引力能? (除“小黑洞”、“大原子核”极端思想) 以太阳为例:

$$E_g \sim GM^2/R \sim 4 \times 10^{48} \text{ erg}, \text{ K-H时标: } t_k \sim E_g/L \sim 3 \times 10^7 \text{ 年}$$

核能?

$4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + 2\text{e}^+ + 2\nu_e$ 平均每核子释放 $\varepsilon \sim 7\text{MeV}$ 能量

太阳每秒有 $N \sim L/\varepsilon \sim 3.6 \times 10^{38}$ 个氢核发生聚变

太阳氢核聚变产能的时标为 $\sim M/(m_p N) \sim 10^{11}$ 年

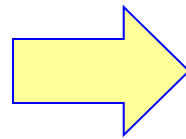
核燃烧条件

解决之道：量子隧穿效应！

（如果不知道量子效应，我们甚至不能理会太阳为什么发光）

粒子热运动动能为Coulomb势垒的 η 倍时，这类核的燃烧过程就能在恒星内部大规模地出现：

$$kT_0 \sim \eta V_c, \quad \eta \in (10^{-4}, 2 \times 10^{-4})$$



主序星质量下限：
(0.07~0.08) M_{\odot}

褐矮星： $M < M_{\min}$; $M \sim 0.08 M_{\odot}$ 或略大如何？

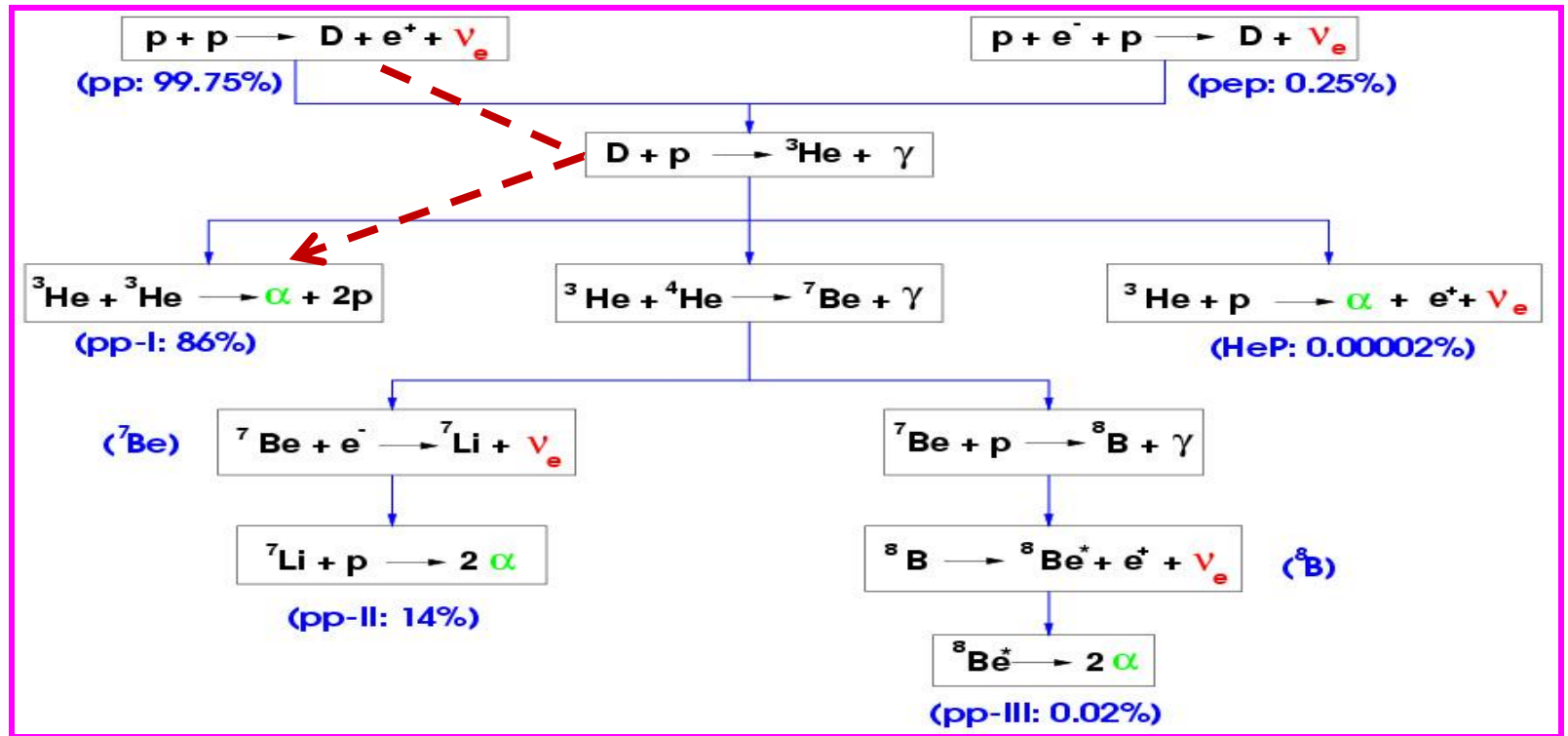
氢闪？

核合成过程

比铁轻元素的核合成过程

氢燃烧: pp链 (和CNO循环)

例: 太阳内部核聚变与太阳中微子问题



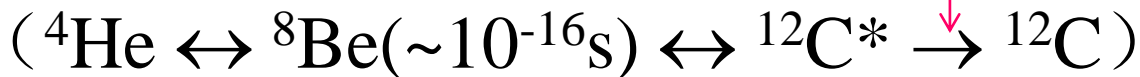


核合成过程

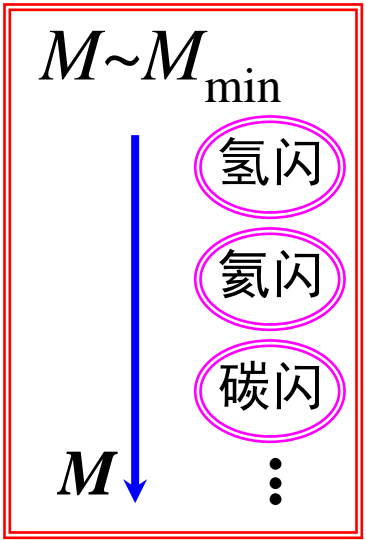
氢燃烧: 3α 反应

创造有机体真不容易...
爱惜生命, 人人有责!

$\sim 3 \times 10^{-4}!!!$



Fred Hoyle 态: 7.65 MeV \Leftrightarrow Ward Wahling: 7.68 ± 0.03 MeV



更高级的核反应: 质量越大核燃烧越充分

例子: $25 M_{\odot}$

看来生命也是宇宙演化的结果...

燃烧阶段	H	He	C	Ne	O	Si
时标	$7 \times 10^6 \text{y}$	$5 \times 10^5 \text{y}$	600y	1y	6月	1d
中心密度(g/cm^3)	50	7×10^2	2×10^5	4×10^6	1×10^7	3×10^7
中心温度(10^9K)	0.06	0.23	0.93	1.7	2.3	4.1
释放核能比例	$\sim 90\%$	$\sim 10\%$				

核合成过程

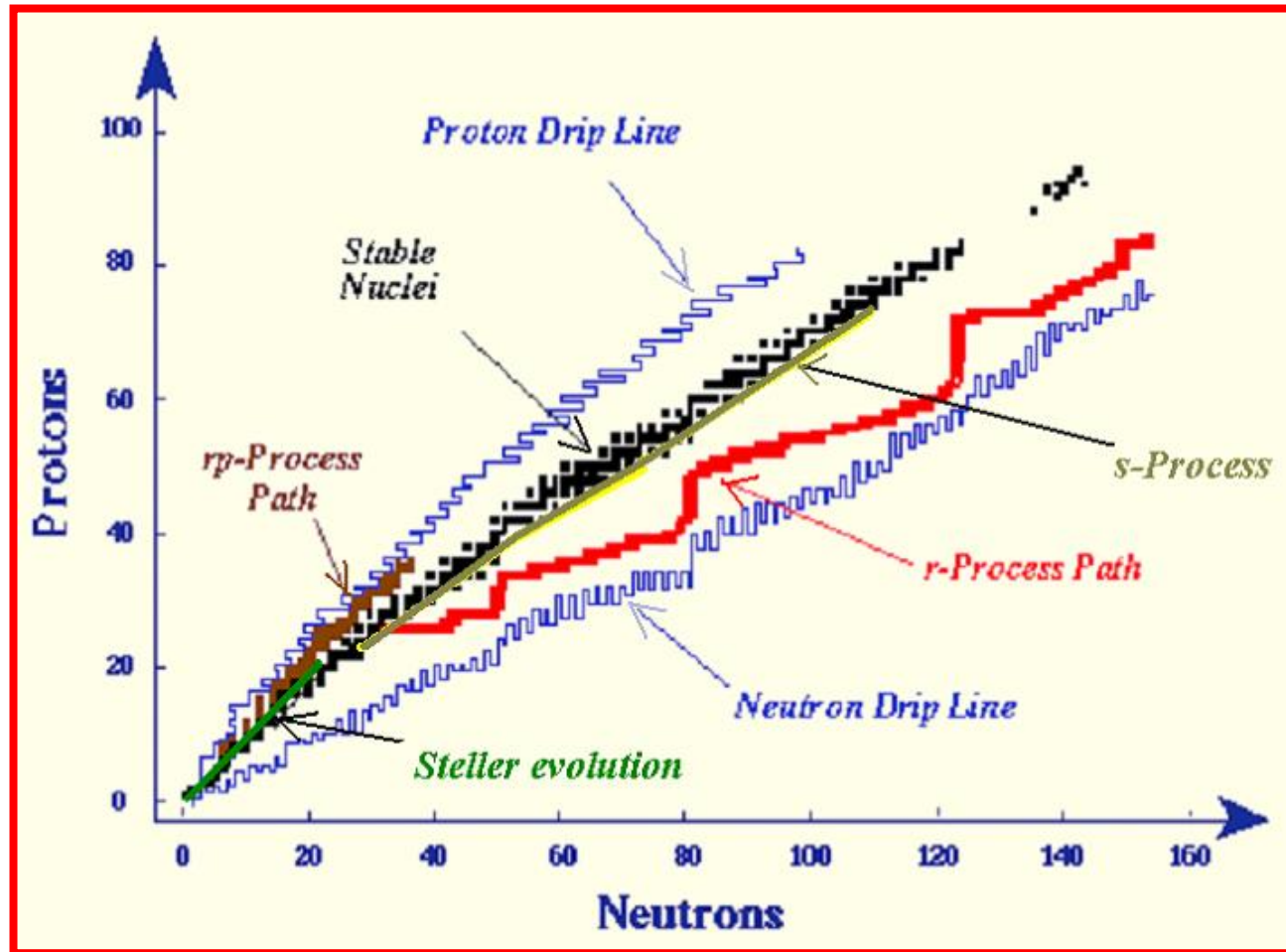
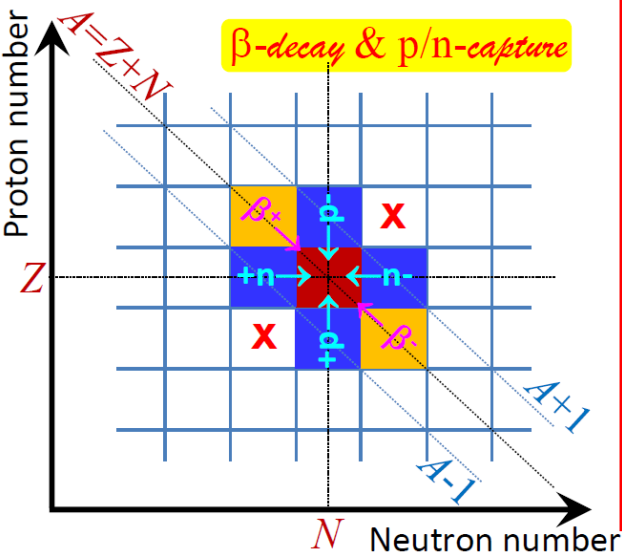
比铁重元素的核合成过程

中子俘获:

s、r过程

质子俘获:

p过程



7, 恒星结构方程组

描述恒星温度、密度等随半径变化:

- 物态一般是温度的函数: $P = P(\rho, T)$, 而 T 依赖产热和传热
 \Rightarrow 主序星结构的求解要比多方球问题复杂的多
- 这组**控制方程**包括:

产能方程: $\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon$

传能方程: $\frac{dT}{dr} = f(T, \kappa, \nabla P)$

状态方程: $P = P(T, \rho, \{X_i\})$

产能率: $\varepsilon = \varepsilon(T, \rho, \{X_i\})$

不透明度: $\kappa = \kappa(T, \rho, \{X_i\})$

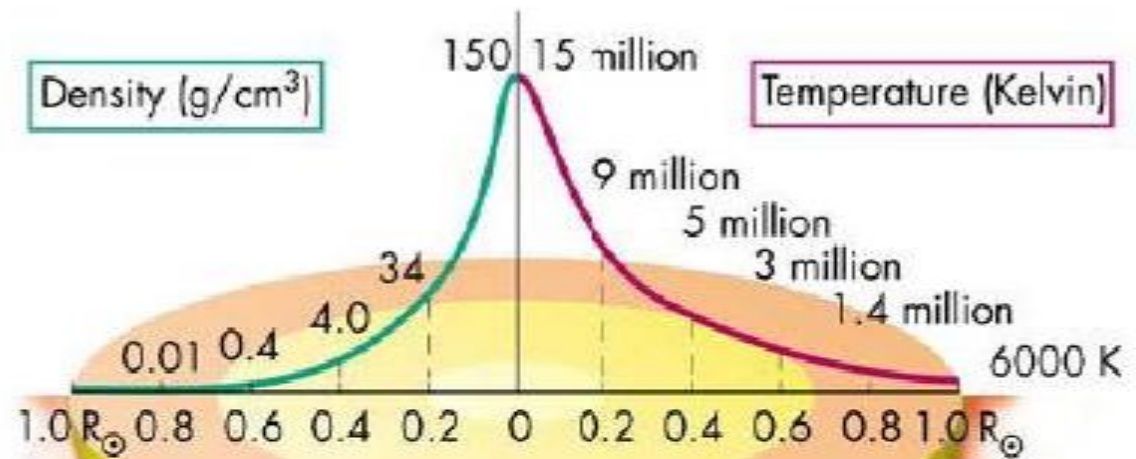
引力平衡: $\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$

描述 P 、 ρ 、 T 、 L 、 ε 、 κ 一组完备方程

恒星结构方程组

标准太阳模型 (Standard solar model, SSM)

- 输入最好的物理和天体物理参数
- 是目前研究最精确的恒星模型
- **历史上的**“太阳中微子问题”



8, 主序星及主序后演化

零龄主序星 (ZAMS) : H燃烧开始进行...

•主序带: 核心H燃烧从开始到结束

•主序阶段的演化:

核心区H数目逐渐减少, $P \downarrow$

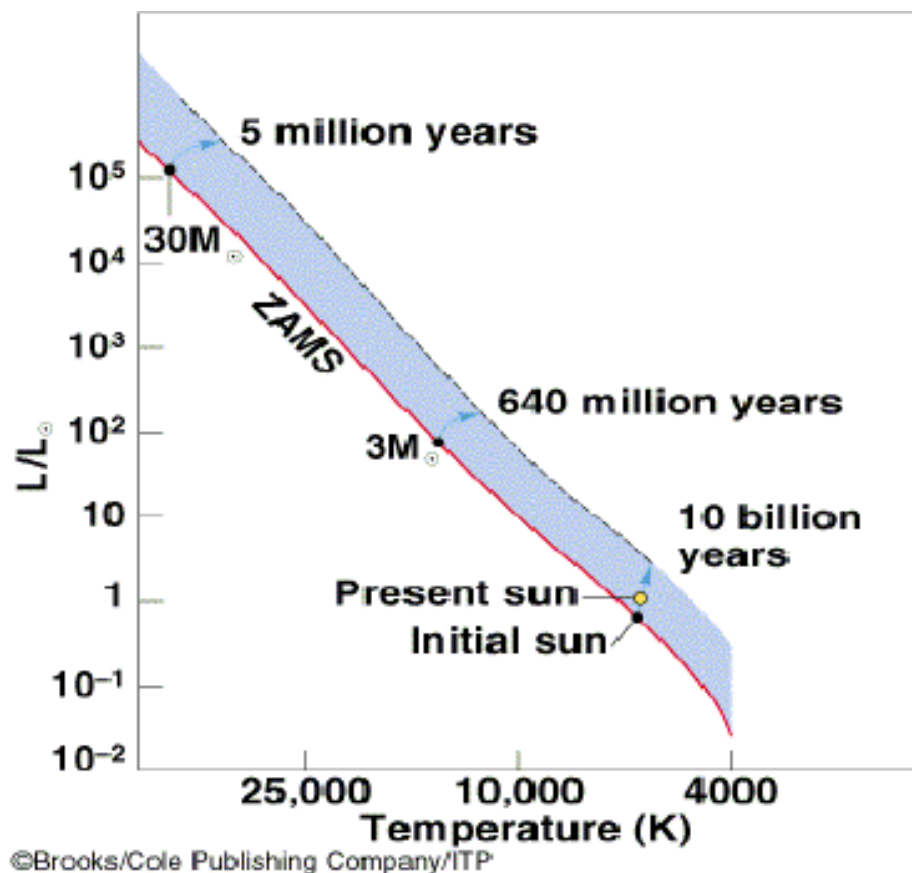
抗衡引力 \Rightarrow 核心收缩, $T, P \uparrow$

H燃烧速率增加 \Rightarrow 光度增加

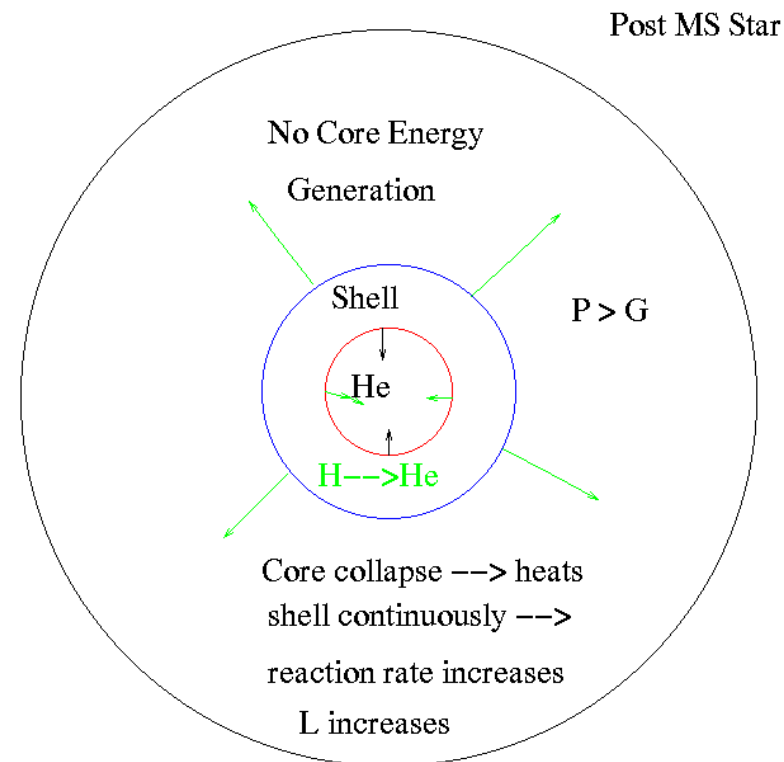
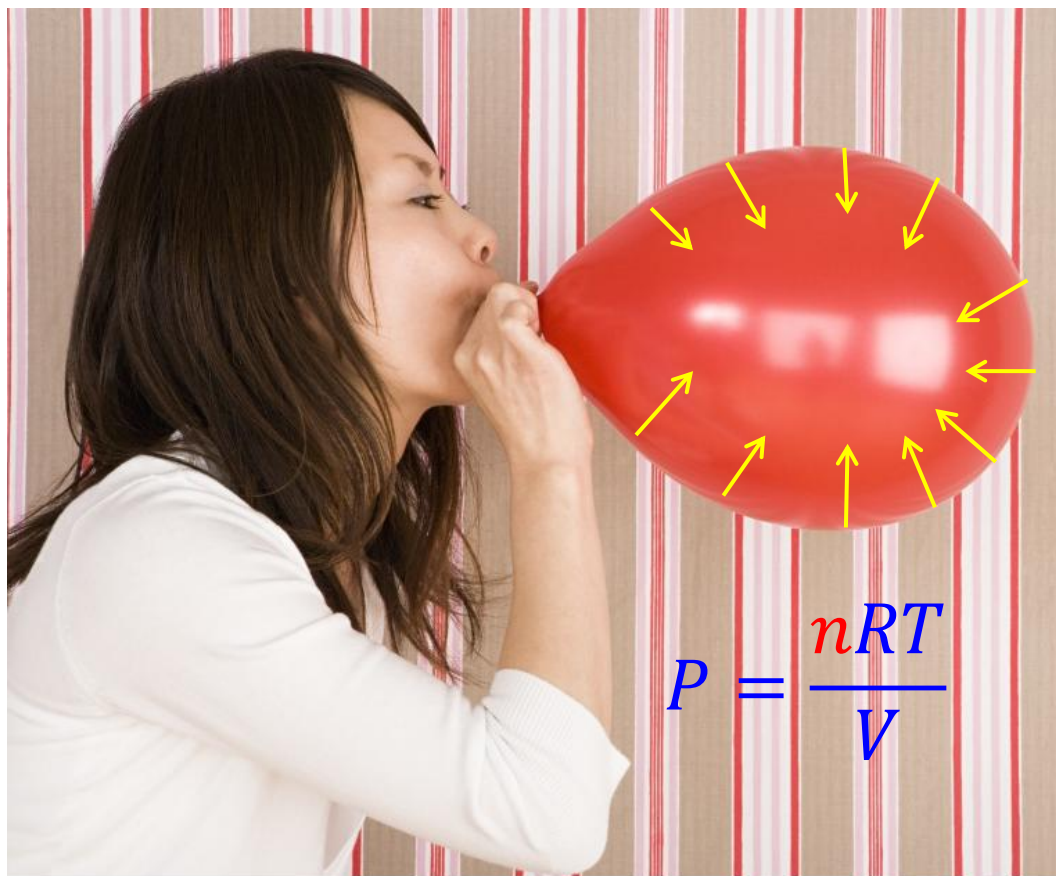
核心区外包层 P 增加

恒星半径增加

•HR图上的演化路径 \longrightarrow



主序后 (post MS) 恒星的结构示意



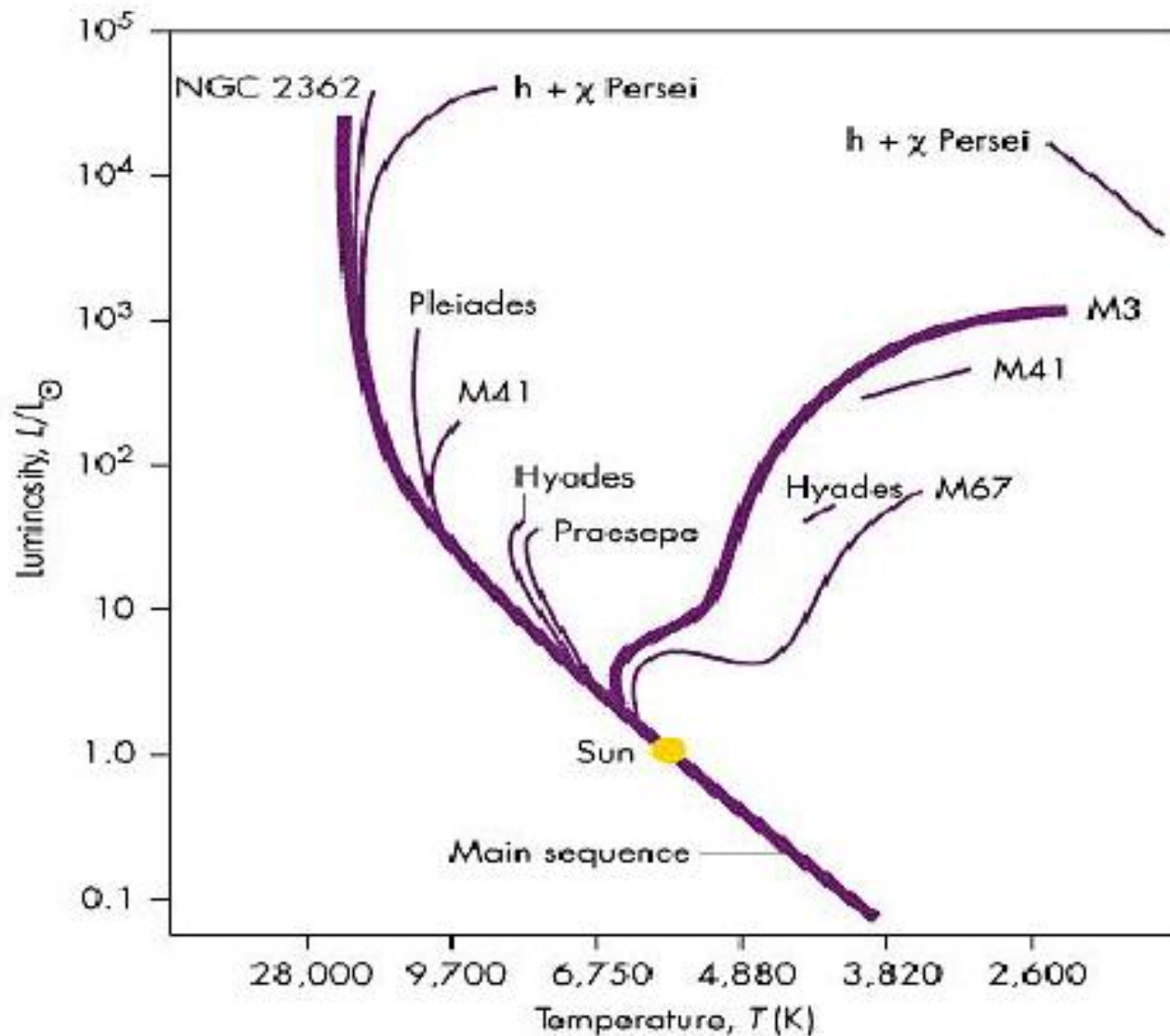
$$P \sim \frac{nRT}{V}$$

脱离主序点 (turn-off point)

星团中恒星
在HR图上的
分布：

脱离主序点
(MSTO)的位置跟星团的
年龄有关

质光关系： $L \propto M^{3.5}$
⇒ 主序星寿命：
 $\tau \propto M/L \sim M^{-2.5}$



9, 旋转恒星的平衡位形

总能量 = 转动动能 + 引力势能 + 弹性能:

$$E = E_0 + L^2/[2I(\varepsilon)] + A\varepsilon^2 + B(\varepsilon - \varepsilon_0)^2$$

(其中 $A = 3GM^2/(25R)$, $B = \mu V/2$)

- 对于流体, $B = 0$; $dE/d\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon$ 为小量 ($\varepsilon = e^2/3$) 时:

$$\Omega = 2e\sqrt{\frac{2\pi\rho G}{15}}$$

$$\varepsilon = (I - I_0)/I_0$$
$$e \equiv (1 - c^2/a^2)^{1/2}$$

- 一般情况下: **Maclaurin** 椭球

$$\Omega^2 = 2\pi G\rho \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} (3-2e^2) \sin^{-1} e - \frac{3(1-e^2)}{e^2} \right]$$

当 $T/|W| > 0.1375$ 时:
Jacobi 椭球 ($c < a \neq b$)

★ 与转动的相似性: 潮汐形变率 Λ (arXiv:2007.00423)

10, 恒星质量的测定

考虑质量 M_1 、 M_2 两星体因引力而互相圆轨道

绕转 \Rightarrow Kepler 第三定律修正式：

$$\frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{r_1^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P_{\text{orb}}} \right)^2$$

a_1

• 推广至一般的椭圆轨道：

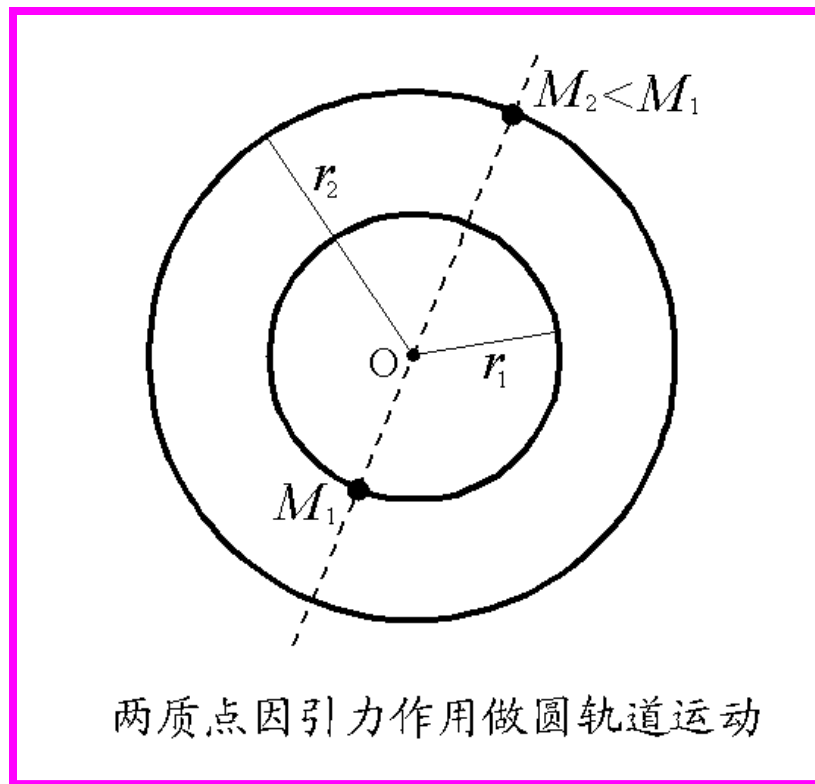
$$\frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{(a_1 \sin i)^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P_{\text{orb}}} \right)^2 \equiv f_1 < M_2$$

$$\frac{(M_1 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{(a_2 \sin i)^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P_{\text{orb}}} \right)^2 \equiv f_2 < M_1$$

质量函数

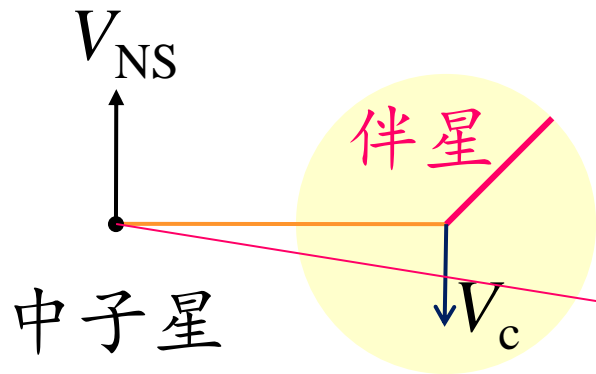
• 啾质量 (Chirp Mass):

$$\frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \left[-\frac{5}{192\pi} \frac{dT}{dt} \right]^{3/5} \frac{c^3 T}{2\pi G}$$



两质点因引力作用做圆轨道运动

10, 恒星质量的测定



动量守恒 $\Rightarrow R \equiv \frac{M_c}{M_{NS}} = \frac{V_{NS}}{V_c} = \frac{V_{NS} \sin i}{V_c \sin i}$

$$f_{NS} = \frac{(M_c \sin i)^3}{(M_{NS} + M_c)^2}$$

掩蚀 $\Rightarrow i$

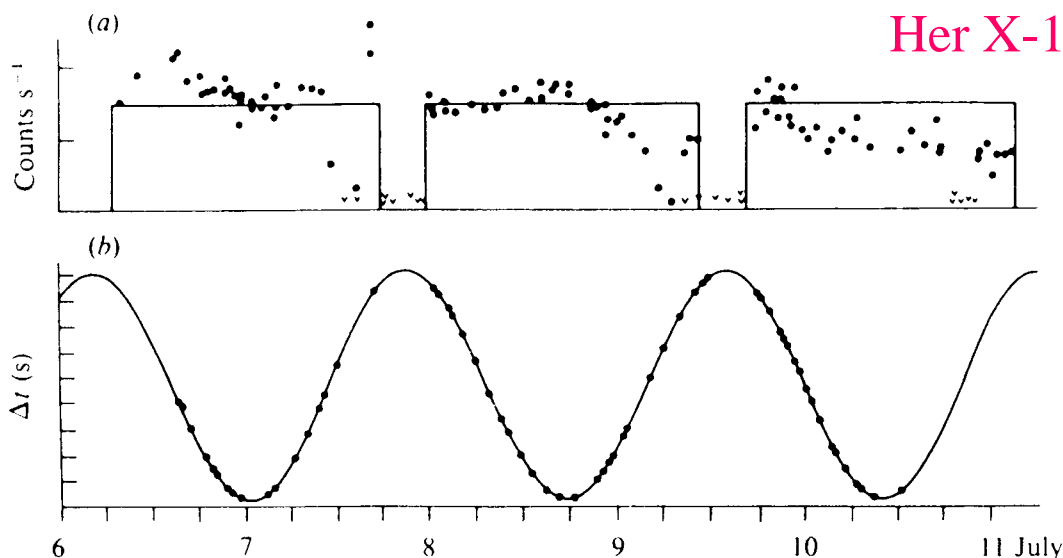
例如: 4U0900-40

$$M_{NS} = 1.9 M_{\text{sun}}$$

$$M_c = 24 M_{\text{sun}} \Rightarrow \text{HMXB}$$

若: $M_c < \sim M_{\text{sun}}$

\Rightarrow LMXB



◆ 通过光被自身“吸引”的程度而度量其质量的方法 \rightarrow 引力透镜

总 结

- 概貌 { 0, 什么是恒星?
1, 恒星演化概貌
- 形成 { 2, Jeans 不稳定与恒星形成
- 结构/平衡 { 力 { 3, 周光关系
4, Lane-Emden 方程与“标准模型”
热 { 5, 核燃烧条件
6, 核合成过程
- 演化 { 7, 恒星结构方程组
8, 主序星及主序后演化
- 二个特征 { 9, 旋转恒星的平衡位形
10, 恒星质量的测定

作业

习题： 3、 2、 6、 8