

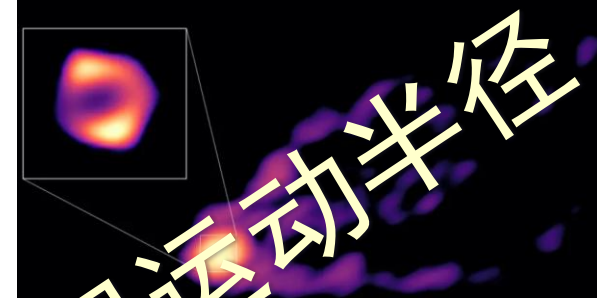
《天体物理学》

第九章 黑洞 (a)

讲授：徐仁新

北京大学物理学院天文学系

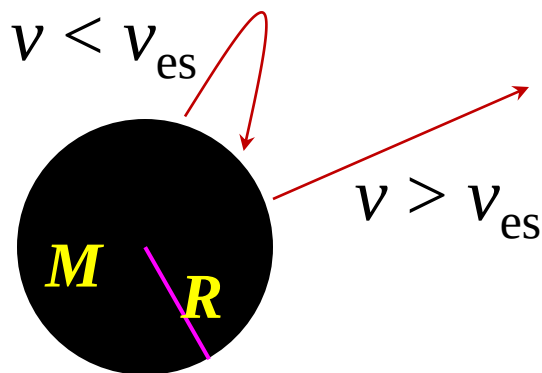
什么是黑洞?



- Laplace “黑洞” (dark star):

逃逸速度: $mv_{es}^2/2 = GMm/R$

$$\Rightarrow v_{es} = (2GM/R)^{1/2}$$



$v_{es} = c$: 不能在遥远处看见光!

电磁波而非有质量点粒子

足够近的这类“黑洞”是可见的

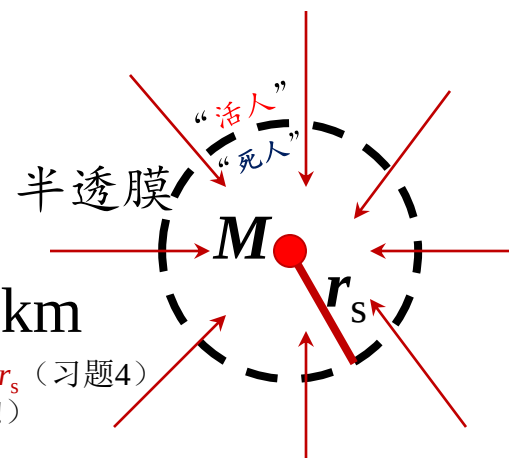
- 广义相对论预言的黑洞:

带有奇性的时空区域!

Schwarzschild半径: $r_s = 2GM/c^2 \approx 3M/M_{\odot} \text{ km}$

什么是时空?

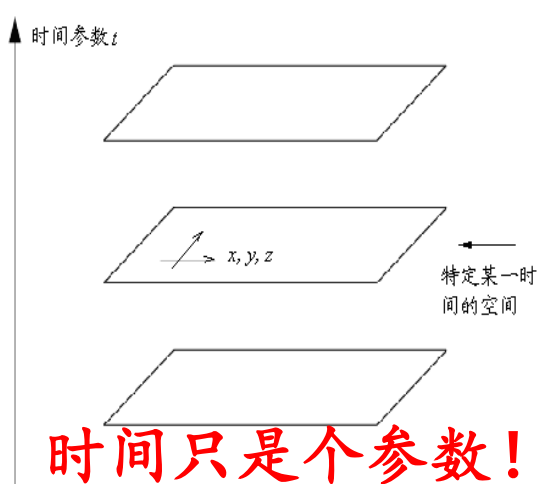
GR => 最小圆轨道半径 $r_{ms} = 3r_s$ (习题4)
(SR+Newton $\Rightarrow r_s/2$!)



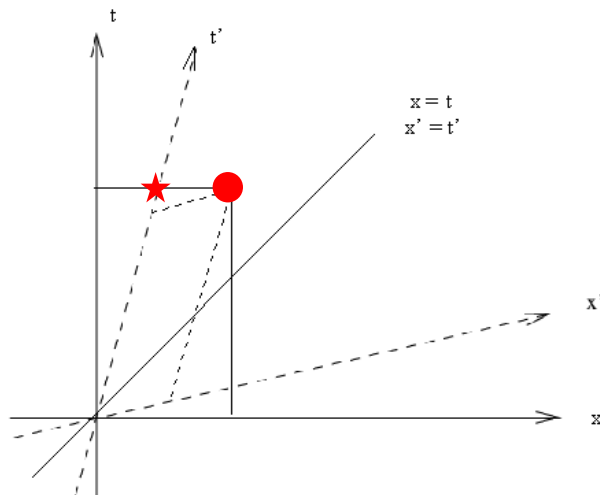
1, 相对论的概念



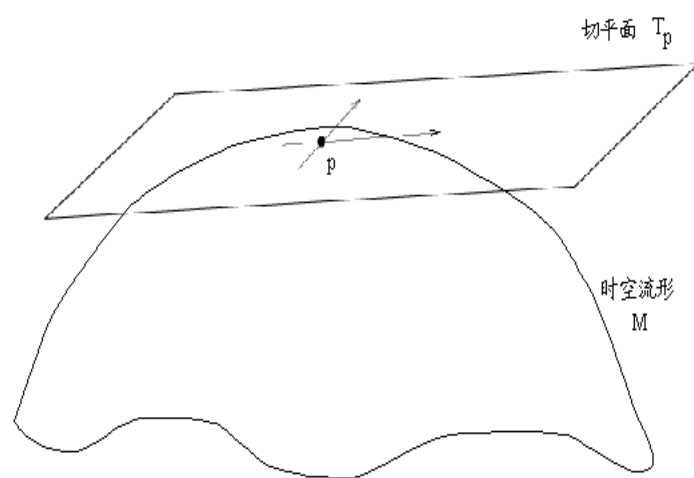
什么是相对论？（三种时空观）



Newton时空观



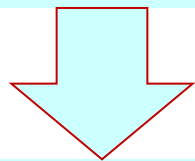
狭义相对论时空观



广义相对论时空观

Newton时空

同时性是绝对的



Galileo变换

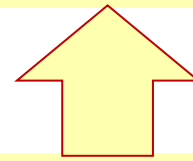
光速不变
(间隔不变)



Lorentz变换

同时性是相对的!

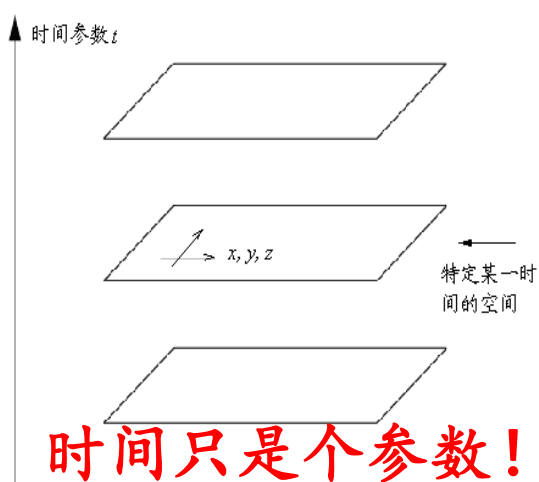
Minkowski时空



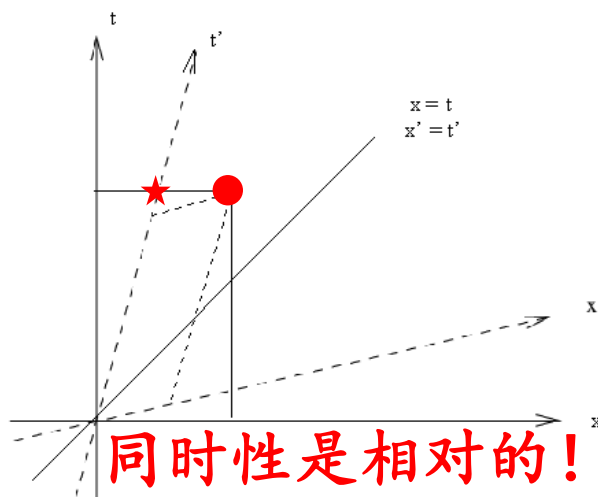
1, 相对论的概念



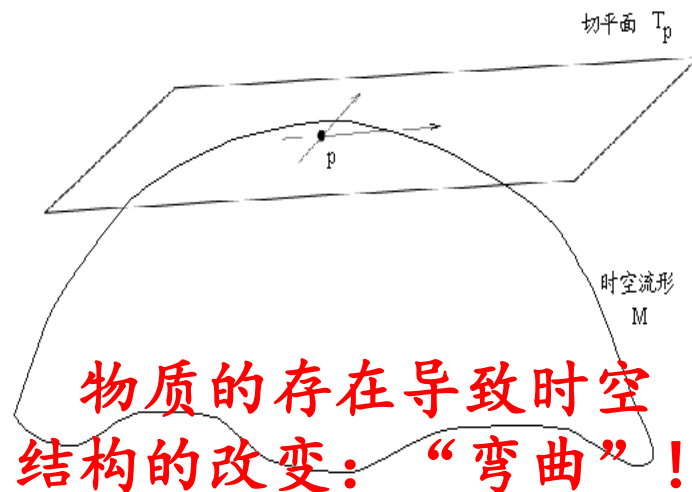
什么是相对论？（三种时空观）



Newton时空观



狭义相对论时空观



广义相对论时空观

“地平面”

• 相对论：将时空统一起来，并研究时空几何结构的理论！

{ 狭义相对论——平直时空，Minkowski时空
广义相对论——弯曲时空，伪Riemann空间

ds^2 非正定！

1, 相对论的概念

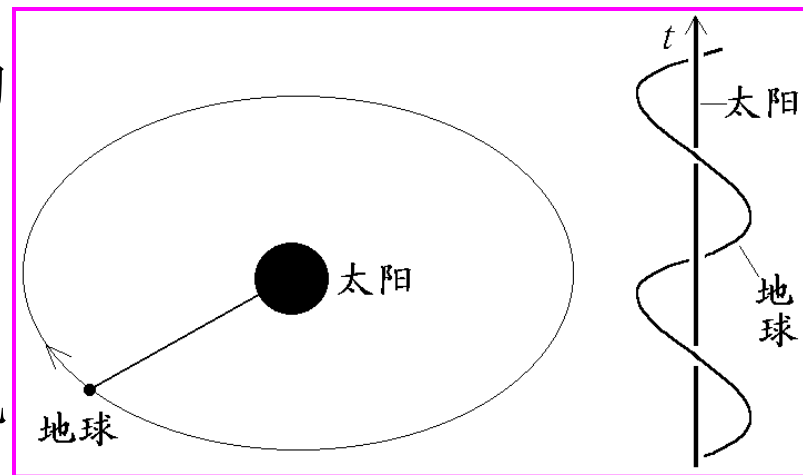
狭义相对论:

- 时空图: 在时空中刻画物质的运动

例: 日地运动

时空图上一点称一事件

- 世界线: 运动状态在时空图上表现
- Euclid空间的线元与(微分)结构



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

一般地,

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j \xrightarrow{\text{求和约定}} g_{ij} dx^i dx^j$$

二阶张量 g_{ij} 为度规, $g_{ij} = g_{ji}$ 。度规 $\Rightarrow$ 空间的微分结构, 反之?

1, 相对论的概念

狭义相对论:

- Euclid空间度规

直角坐标: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$; 其它 $g_{ij} = 0$

球坐标: $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$; 其它 $g_{ij} = 0$

- 三维非Euclid空间

如果 g_{ij} 的六个分量取成坐标的任意函数, 这时描述的空间就不一定是Euclid空间, 而是一般弯曲空间——(伪)Riemann空间

例: 二维弯曲面——单位球面, $ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2$ ($x: \theta, y: \varphi$)

- 时空是一种特殊的非Euclid空间, 时空线元 ds^2 (如 $-dt^2 + dl^2$)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad \mu, \nu = 0(t), 1(x), 2(y), 3(z)$$

- 狭义相对论时空观: Minkowski时空

“平直”的时空

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1, 相对论的概念

狭义相对论:

- **光锥**: 为刻画时空的因果特性而将时空分区

类时, 可能存在因果关系的区域

绝对的过去, 绝对的未来

类空, 不可能有因果关系的区域

类光, 以光速产生因果关系的集合

- **测地线**: 为连接两时空点的短程线

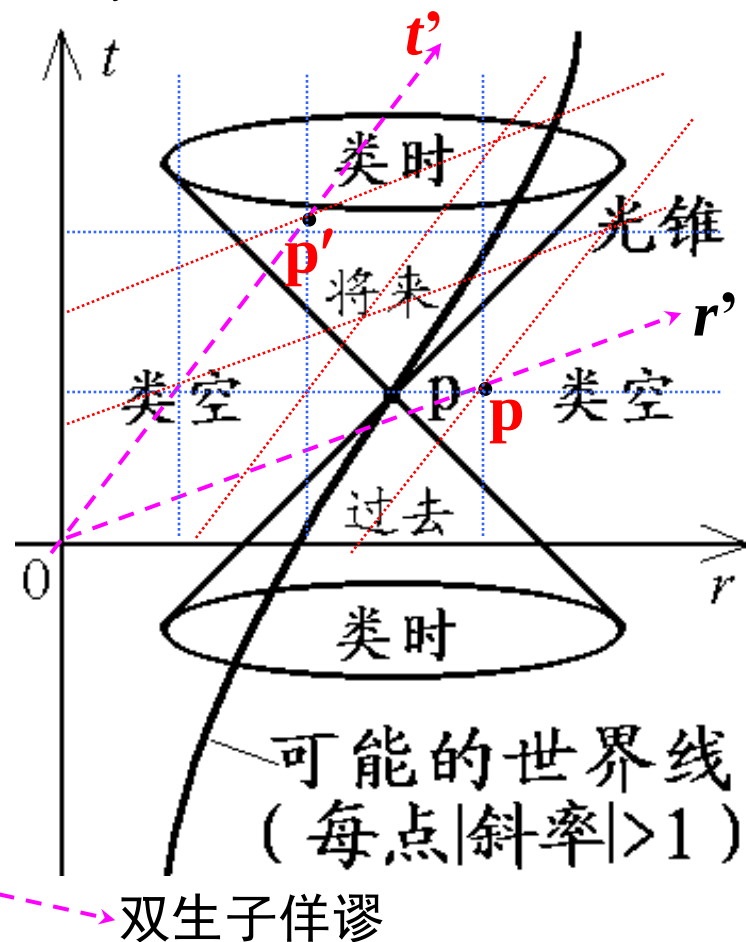
即, 两时空点间隔 $\int ds^2$ 最小

类空测地线: 选择 p 与 p' 同时的参考

系中观测到的最短空间路径

类时测地线: 选择 p 与 p' 同地的参考

系中观测到的时间流逝最长路径



1, 相对论的概念

广义相对论:

- 等效原理

弱等效原理(WEP): $m_G = m_I \Leftrightarrow$ Einstein 电梯中力学规律等效...

Einstein 等效原理(EEP): Einstein 电梯中物理规律都等效...

- “引力”难道等效于“非惯性系”?

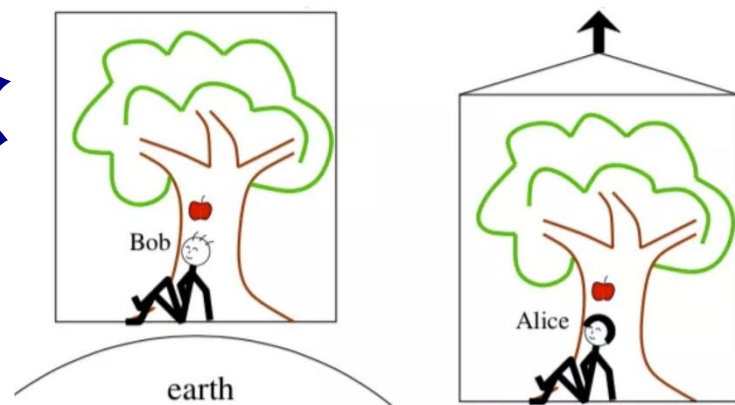
→ 时空任意点存在局部自由下落观者, 其时空由Minkowski度规描述。而整体时空可看作无穷多Minkowski时空拼凑而成 (任一点Minkowski时空实际上是流形该点切空间)

- 广义相对论对“引力”的理解:

物质的存在导致时空弯曲, 自由粒子(只受引力)沿测地线运动

- 广义相对论的**经典检验**:

光在太阳引力场中弯曲, 水星近日点进动, 地球引力场中红移



1, 相对论的概念

广义相对论:

- 如何描述时空弯曲? Riemann张量!

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}$$

其中 $\Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\rho} = \partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} / \partial x^{\sigma}$, $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ 称为Christoffel符号, 是度规张

量的函数, $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})/2$, $g_{\rho\mu,\nu} = \partial g_{\rho\mu} / \partial x^{\nu}$ 。

- 怎么还区分上下指标?

n 阶张量可以看作 n 个矢量的线性函数。在欧氏空间中采用直角坐标系描述张量时, 区分上下指标描述张量意义不大; 但若采用非直角坐标系或非欧空间中描述张量时, 区分上下指标是必要的

原则上, 选定坐标给定度规后Riemann张量 $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ 就确定了!

- 弯曲空间: Riemann张量 $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ 存在非零分量

可以验证Minkowski时空是平直时空 (所有分量为零)

1, 相对论的概念

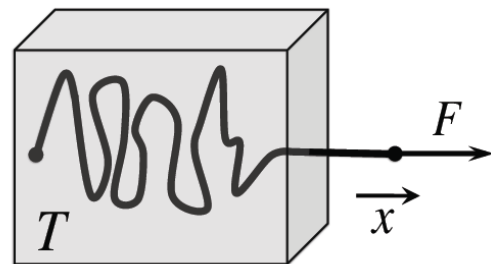
广义相对论:

- Ricci张量: 缩并一次, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}{}^{\sigma}$
- 曲率标量: 缩并Ricci张量, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$
- Einstein张量: 定义为

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

引力真是基本力吗?

引力是熵力?



- 物质分布如何决定时空结构? **Einstein场方程!** $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$

时空曲率由Riemann张量描述, 物质场由能动张量 $T_{\mu\nu}$ 描述!

静止理想流体: $T_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\sigma}T_{\mu\sigma} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ 静态球对称 $\rightarrow$ **TOV方程**

Einstein场方程是一组**高度非线性偏微分方程!** (一般难解)

2, Schwarzschild时空

Schwarzschild时空线元:

- 历史上: Einstein方程的第一个解

1915年12月在Einstein场方程刚发表一个月, 德国军队中一位志愿入伍的学者Schwarzschild在与俄军作战的前线得出了Einstein场方程的第一个精确解。Schwarzschild在次年5月病逝于军中...

- 真空Einstein场方程 $G_{\mu\nu} = 0$ 的静态(*static*)球对称解:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$



M : 中心天体质量; $\{t, r, \theta, \varphi\}$: Schwarzschild坐标。

- 奇点:

$r = 2M$ (坐标奇点); $r = 0$ (内禀奇点)



等 r 点面积 $4\pi r^2$

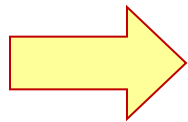
2, Schwarzschild时空

Schwarzschild时空结构:

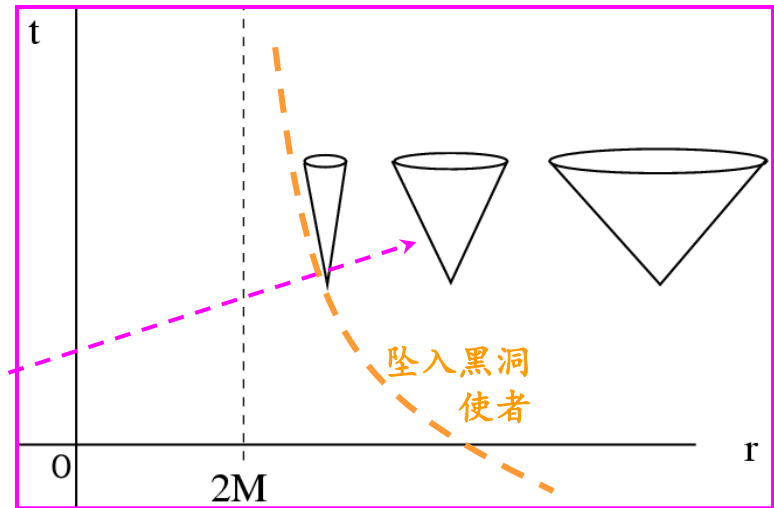
- Schwarzschild坐标下的光锥

$r > 2M$ 区域: r 方向光子 $ds^2 = 0 \Rightarrow$

$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2$$



$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$



对于大 r 区斜率接近 ± 1 (平直时空)。而当 $r \rightarrow 2M$ 时, 斜率趋于无穷

- Eddington坐标: 坐标变换 $t' = t + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$

$\Rightarrow$ 时空线元

$r = 2M$ 处的
奇异性消除!

$$ds'^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt'^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + \frac{4M}{r} dt' dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

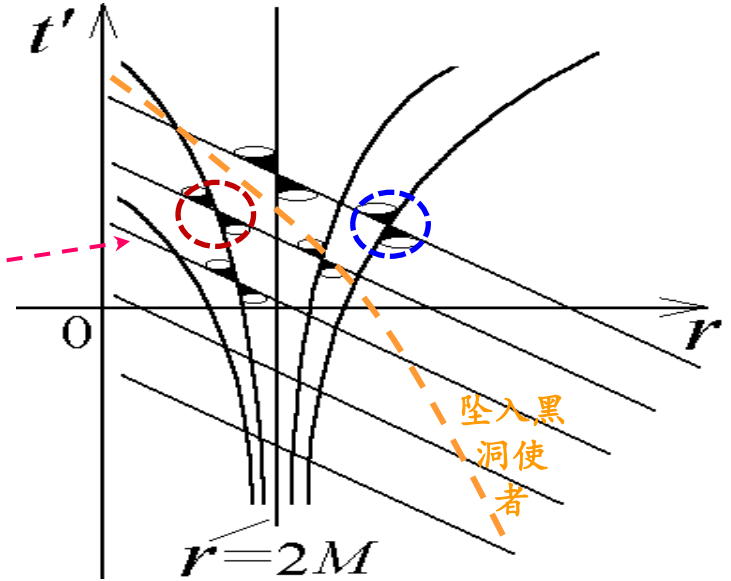
2, Schwarzschild时空

Schwarzschild时空结构:

- Eddington坐标下的光锥

r 方向光子 $ds'^2 = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dt'}{dr} = -1 \quad \text{或} \quad \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$



- $r < 2M$ 区: “时空互换”

r 是“类时”的而 t' 是“类空”的!

正如Minkowski时空中时间不能倒流, 在 $r = 2M$ 面以内不可能向外发射光或粒子

- 事件视界: $r = 2M$ 面, 简称视界; 其半径又称为Schwarzschild半径 (或黑洞半径)

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx (3\text{km}) \frac{M}{M_{\text{sun}}}$$

如何使中子星、地球成为黑洞?

Roger Penrose, University of Oxford, UK

“for the discovery that black hole formation is a robust prediction of the general theory of relativity”

Reinhard Genzel, MPI for Extraterrestrial Physics, Garching, Germany and University of California, Berkeley, USA

Andrea Ghez, University of California, Los Angeles, USA

“for the discovery of a supermassive compact object at the centre of our galaxy”



The 2020 Physics Laureates

The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the Nobel Prize in Physics 2020 with one half to **Roger Penrose** “for the discovery that black hole formation is a robust prediction of the general theory of relativity” and the other half jointly to **Reinhard Genzel** and **Andrea Ghez** “for the discovery of a supermassive compact object at the centre of our galaxy”.

2, Schwarzschild时空

Schwarzschild时空的其它特性: ($r > r_s$)

• 最小圆轨道半径

Newton引力: $m \neq 0$ 点粒子圆轨道半径可以任意小

Schwarzschild时空: 只有在 $r > r_{ms} = 3r_s$ 的区域才可能存在圆轨道

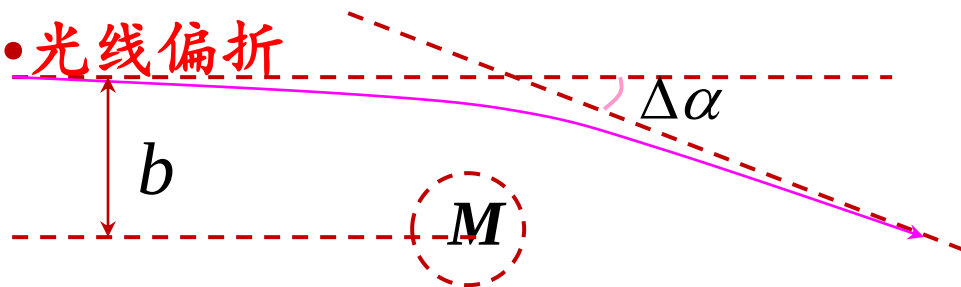
→ 吸积盘内半径, 在 $r < r_{ms}$ 区就不可能存在作Kepler运动!

• 引力红移 (无限红移面: $r = r_s$)

红移量 $z = (\lambda' - \lambda)/\lambda$, $r' \rightarrow \infty$ 时:

$$z = \left(1 - \frac{r_s}{R}\right)^{-1/2} - 1 \xrightarrow{R \gg r_s} \frac{GM}{c^2 R} + \frac{3}{2} \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2 + \dots$$

• 光线偏折



$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 - r_s/r'}{1 - r_s/r}}$$

事件视界面 = 无限红移面

$\Delta\alpha$ 较小时:

$$\Delta\alpha \approx \frac{2r_s}{b} = \frac{4GM}{c^2 b}$$

2, Schwarzschild时空

GR引力与Newton引力的比较:

- **Einstein**场方程描述了物质的存在如何导致时空的弯曲；粒子在弯曲时空中的运动表现为“引力”，其弱场、低速情形的近似即为Newton的“万有引力”。
- 相对于Newton引力而言，广义相对论修正定性上是使得引力场在强场时**增强**了！

✓ 最小圆轨道半径 $r_{\text{ms}} = 3r_s > r_s/2$

✓ 光线弯曲半径 $\Delta\alpha \approx 2r_s/b > r_s/b$

伪Newton势:

$$\phi = -\frac{GM}{r - 2M}$$

总 结

- 0, 什么是黑洞?
- 1, 相对论的概念
- 2, Schwarzschild时空
- 3, Kerr时空
- 4, 黑洞的量子效应
- 5, 黑洞可能存在与观测证认

作业

习题：4, 5

5. 在平直空间中天体辐射的光子直线运动. 然而, 如果位于点辐射源 R 和观测者 O 之间连线上存在一暗天体 L (如图), 则因受 L 引力场的影响, 观测者看到的不是点源, 而是一圆形辐射 (称为 Einstein 环). 计算 Einstein 环大小 θ_E 为

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(r_R - r_L)}{r_R r_L}},$$

其中 M 为暗天体 L 的质量.

